ত্ৰিকোণমিতিৰ পৰিচয় (Introduction to Trigonometry)

অষ্টম অধ্যায়

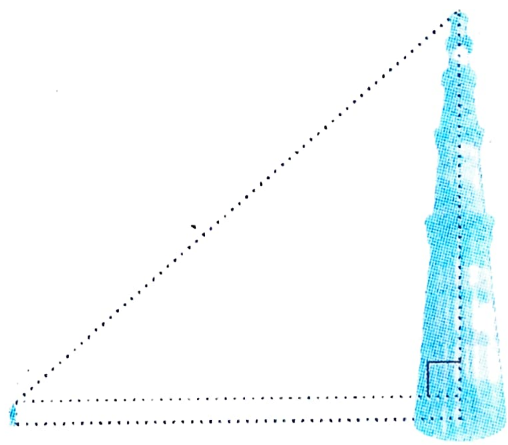
There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.

– J.F. Herbart (1890)

8.1 অৱতাৰণা (Introduction)

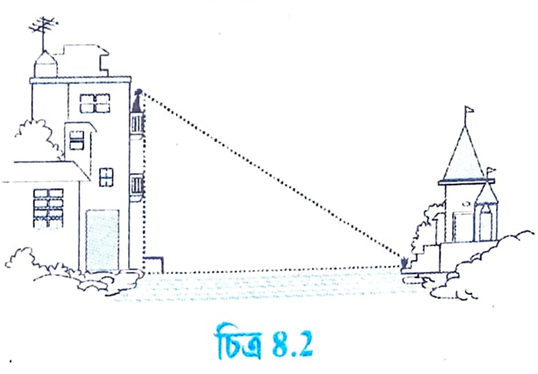
তোমালোকে ইতিমধ্যে ত্ৰিভুজৰ বিষয়ে, বিশেষকৈ সমকোণী ত্ৰিভুজৰ বিষয়ে, আগৰ শ্ৰেণীত অধ্যয়ন কৰিছা। আমাৰ চৌপাশৰপৰা এতিয়া কিছুমান উদাহৰণ লওঁ যিবিলাকত সমকোণী ত্ৰিভুজ গঠন হৈছে বুলি কল্পনা কৰিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে

1. ধৰা হ'ল এখন স্কুলৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীবিলাক কুতুব মিনাৰ দৰ্শন কৰিবলৈ গ'ল। এজন ছাত্ৰই যদি মিনাৰটোৰ শীৰ্ষলৈ চায় তেনেহ'লে চিত্ৰ 8.1ত দিয়াৰ দৰে এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ গঠন হৈছে বুলি কল্পনা কৰিব পাৰি। প্ৰকৃততে নোজোখাকৈ ছাত্ৰজনে মিনাৰটোৰ উচ্চতা উলিয়াব পাৰিবনে?



চিত্ৰ 8.1

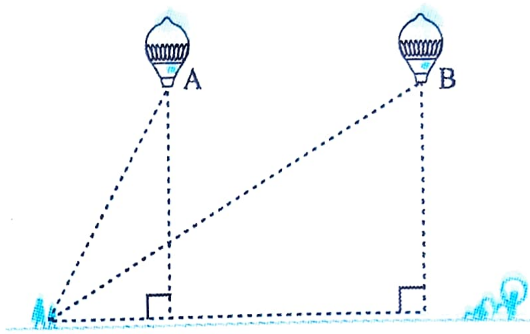
2. ধৰা হ'ল এজনী ছোৱালী নদীৰ পাৰত অৱস্থিত তেওঁলোকৰ ঘৰটোৰ বেলকনিত বহি আছে। তাই নদীখনৰ সিপাৰে থকা মন্দিৰ এটাৰ খট্‌খটিৰ ফুলৰ টাব এটালৈ তলৰ দিশে চাই



চিত্ৰ 8.2

আছে। এই ক্ষেত্ৰতো চিত্ৰ 8.2ত দিয়াৰ দৰে এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ গঠন হোৱা বুলি কল্পনা কৰিব পাৰি। যদি তোমালোকে ছোৱালীজনী বহি থকা স্থানৰ উচ্চতা জানা, তেনেহ'লে নদীখন কিমান বহল উলিয়াব পাৰিবানে?

3. ধৰা হ'ল গৰম বায়ুপূৰ্ণ বেলুন এটা ওপৰত আছে। ছোৱালী এজনীয়ে আকাশত বেলুনটো দেখা পালে আৰু মাকক ক'বলৈ ভিতৰলৈ দৌৰি গ'ল। মাকে বেলুনটো চাবলৈ ততাতৈয়াকৈ বাহিৰলৈ আহিল। ছোৱালীজনীয়ে প্ৰথমতে দেখোতে বেলুনটো A স্থানত আছিল। কিন্তু পিচৰবাৰ মাক আৰু জীয়েক দুয়ো যেতিয়া বেলুনটো চাবলৈ আহিছিল তেতিয়া ই উৰি গৈ আন এটা স্থান B পালে গৈ। এতিয়া তোমালোকে মাটিৰ পৰা বেলুনটোৰ উন্নতি উলিয়াব পাৰিবানে?



চিত্ৰ 8.3

ওপৰৰ এই আটাইকেইটা অৱস্থাতেই দূৰত্ব বা উচ্চতা উলিয়াবলৈ কিছুমান গাণিতিক কৌশল প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি যিটো গণিতৰ এটা ভাগ 'ত্ৰিকোমিতি'ত অধ্যয়ন কৰা হয়। এই ত্ৰিকোণমিতি শব্দটো গ্ৰীক ভাষাৰ 'Tri' (যাৰ অৰ্থ 'তিনি'), 'gon' (যাৰ অৰ্থ 'বাহু') আৰু 'metron' (যাৰ অৰ্থ 'জোখ')ৰ পৰা লোৱা হৈছে। দৰাচলতে ত্ৰিকোণমিতি হ'ল ত্ৰিভুজৰ কোণ আৰু বাহুৰ সম্পৰ্ক আলোচনা কৰা এটা বিষয়। ত্ৰিকোণমিতিৰ চৰ্চাৰ প্ৰাচীনতম তথ্য ইজিপ্ত আৰু বেবিলনত পোৱা গৈছে। আগৰ দিনৰ জ্যোতিৰ্বিদসকলে ইয়াৰ সহায়ত পৃথিৱীৰ পৰা গ্ৰহ-নক্ষত্ৰবিলাকৰ দূৰত্ব উলিয়াইছিল। আনহে নালাগে এতিয়াও, ইঞ্জিনীয়াৰিং আৰু ভৌতিক বিজ্ঞানত ব্যৱহৃত বেছিভাগ প্ৰযুক্তি বিদ্যাৰ উন্নত পদ্ধতি ত্ৰিকোণমিতিৰ ধাৰণাৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত।

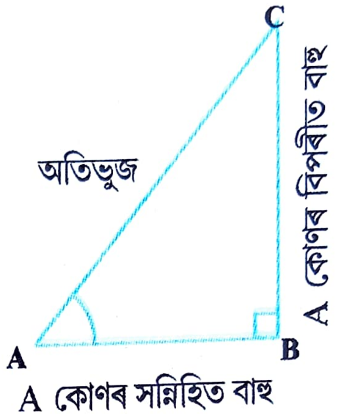
এই অধ্যায়ত, এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ সূক্ষ্মকোণ বিলাকৰ সাপেক্ষে তাৰ বাহুবিলাকৰ কিছুমান অনুপাতৰ বিষয়ে আমি আলোচনা কৰিম। এই অনুপাত বিলাকক **'কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত' (trigonometric ratios of the angle)** বোলে। আমাৰ আলোচনা মাত্ৰ সূক্ষ্ম কোণতেই সীমাবদ্ধ থাকিব। সেয়ে হ'লেও, এই অনুপাত অন্য কোণলৈও সম্প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰি। আমি ইয়াত 0° আৰু 90° কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰো সংজ্ঞা দাঙি ধৰিম। আমি কিছুমান বিশেষ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত গণনা কৰিম আৰু এই অনুপাত বিলাকক জড়িত কৰি কিছুমান অভেদ উলিয়াম। এই অভেদবিলাকক 'ত্ৰিকোণমিতিক অভেদ' **(trigonometric identities)** বোলে।

8.2. ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios)

অনুচ্ছেদ 8.1ত তোমালোকে দেখিছা যে বেলেগ বেলেগ পৰিস্থিতিত কিছুমান সমকোণী ত্ৰিভুজ কল্পনা কৰিব পাৰি।

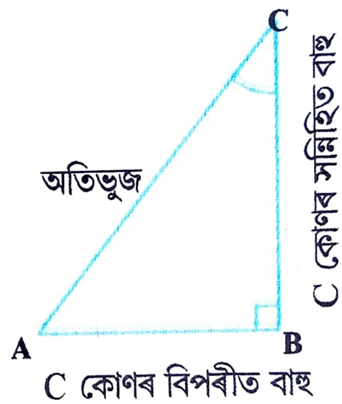
এতিয়া চিত্ৰ 8.4ত দিয়াৰ দৰে আমি ABC সমকোণী ত্ৰিভুজ এটা লওঁ।

ইয়াত, $\angle CAB$ (বা চমুকৈ কোণ A) এটা সূক্ষ্মকোণ। A কোণৰ সাপেক্ষে BC বাহুৰ অৱস্থান মন কৰা। ইয়াৰ সন্মুখত $\angle A$ আছে। আমি ইয়াকে A কোণৰ 'বিপৰীত বাহু' বুলি কওঁ। এই সমকোণী ত্ৰিভুজটোৰ AC হ'ল অতিভুজ আৰু AB বাহুটো $\angle A$ৰ এটা অংশ। আমি ইয়াকে A কোণৰ 'সন্নিহিত বাহু' বুলি কওঁ।



চিত্ৰ 8.4

মনত ৰাখিবা যে এই বাহুকেইটাৰ স্থান সলনি হ'ব যদিহে A কোণৰ ঠাইত আমি C কোণ লওঁ (চিত্ৰ 8.5 চোৱা)।



চিত্ৰ 8.5

তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত অনুপাতৰ বিষয়ে পঢ়ি আহিছা। এতিয়া আমি সমকোণী ত্ৰিভুজৰ বাহুবিলাকক জড়িত কৰি কিছুমান নিৰ্দিষ্ট অনুপাতৰ সংজ্ঞা আগবঢ়াম আৰু এই বিলাকক ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বুলি ক'ম।

ABC সমকোণী ত্ৰিভুজৰ (চিত্ৰ 8.4 চোৱা) A কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবিলাকৰ সংজ্ঞা হ'ল—

$$\angle A\text{ৰ sine} = \frac{\text{A কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A\text{ৰ cosine} = \frac{\text{A কোণৰ সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A\text{ৰ tangent} = \frac{\text{A কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{\text{A কোণৰ সন্নিহিত বাহু}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A\text{ৰ cosecant} = \frac{1}{\angle A\text{ৰ sine}} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{A কোণৰ বিপৰীত বাহু}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A\text{ৰ secant} = \frac{1}{\angle A\text{ৰ cosine}} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{A কোণৰ সন্নিহিত বাহু}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A\text{ৰ cotangent} = \frac{1}{\angle A\text{ৰ tangent}} = \frac{A \text{ কোণৰ সন্নিহিত বাহু}}{A \text{ কোণৰ বিপৰীত বাহু}} = \frac{AB}{BC}$$

ওপৰত দিয়া এই অনুপাত বিলাকক চমুকৈ sinA, cosA, tanA, cosecA, secA আৰু cotA বুলি ক্রম অনুসৰি লিখা হয়। মন কৰা যে cosecA, secA আৰু cotA ক্রমে sinA, cosA আৰু tanAৰ অনোন্যক।

তদুপৰি মন কৰা যে $\tan A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ আৰু $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$.

গতিকে এটা সমকোণী ত্রিভুজৰ এটা সূক্ষ্মকোণৰ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে ত্রিভুজটোৰ কোণটো আৰু বাহু বিলাকৰ মাজৰ সম্পর্ক প্রকাশ কৰে।

এতিয়া তোমালোকে C কোণৰ (চিত্র ৪.5 চোৱা) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতৰ সংজ্ঞা দিবলৈ যত্ন নকৰানো কিয়?

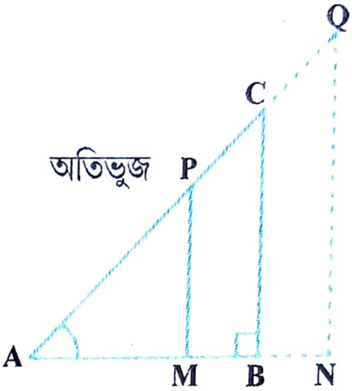
আমি আজি **'sine'** ৰ ব্যৱহাৰ যিদৰে কৰোঁ ইয়াৰ ধাৰণা 500 খৃষ্টাব্দত ৰচিত আৰ্য্যভটৰ 'আৰ্য্যভটীয়'ত পোৱা যায়। আৰ্য্যভটই জ্যা এডালৰ আধাৰ বাবে 'অর্ধ জ্যা' (***ardha-jya***) শব্দটো ব্যৱহাৰ কৰিছিল আৰু কালক্রমত ইয়েই চমুকৈ 'জ্যা' বা জিৱা' (***jya*** or ***jiva***) হ'ল। যেতিয়া আৰ্য্যভটীয় আৰবী ভাষালৈ অনুবাদ কৰা হৈছিল তেতিয়া তাত 'জিৱা' শব্দটো ৰখা হৈছিল। কিন্তু এই আৰবী সংস্কৰণটো লেটিন ভাষালৈ অনুবাদ কৰোতে 'জিৱা (***jiva***)ক '***sinus***' হিচাপে অনুবাদ কৰা হৈছিল। অতি সোনকালেই এই '***sinus***' শব্দটো, চমুকৈ ***sine***, ইউৰোপৰ গণিতিক পাঠ্যপুথিত প্রচলিত হ'বলৈ ধৰিলে। জ্যোতির্বিজ্ঞানৰ ইংৰাজ প্রফেছৰ এডমাণ্ড গুন্টাৰে (1581–1626) চমুকৈ লিখা '***sin***' চিহ্নটো প্রথমে ব্যৱহাৰ কৰিছিল।

আৰ্য্যভট
A.D. 476 – 550

cosine আৰু **tangent** শব্দ দুটাৰ উদ্ভৱ যথেষ্ট পিছৰ। পূৰক কোণৰ Sine গণনাৰ প্রয়োজনত cosine ফলনৰ উদ্ভৱ হৈছিল। আৰ্য্যভটই ইয়াক 'কোটি জ্যা' (**kotijya**) নাম দিছিল। এডমাণ্ড গুন্টাৰে '***cosinus***' নামটো পোনতে ব্যৱহাৰ কৰিছিল। 1674 চনত ইংৰাজ গণিতজ্ঞ ছাৰ জ'নাছ মোৰে ইয়াৰ চমুৰূপ '***cos***' চিহ্নটো প্রথমে ব্যৱহাৰ কৰিছিল।

মন্তব্য ঃ মন কৰিবা যে 'sinA' প্ৰতীকটো 'Sine of the angle A' ৰ সংক্ষিপ্তৰূপ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। sinA টো sin আৰু A ৰ পূৰণফল নহয়। A নিদিয়াকৈ sin লিখিলে তাৰ কোনো অৰ্থ নাথাকে। একেদৰে cosA টো 'cos' আৰু Aৰ পূৰণফল নহয়। একে কথাই অন্য কেইটা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য হয়।

এতিয়া সমকোণী ত্ৰিভুজ ABC ৰ AC অতিভুজৰ ওপৰত P এটা বিন্দু লৈ ABৰ ওপৰত PM লম্ব টনা হ'ল অথবা ACৰ বৰ্ধিত অংশত Q এটা বিন্দু লৈ ABৰ বৰ্ধিত অংশত QN এডাল লম্ব টনা হ'ল। (চিত্ৰ 8.6 চোৱা)। এনে অৱস্থাত ΔPAMৰ $\angle A$ ৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ লগত ΔCABৰ $\angle A$ ৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বিলাকৰ কি প্ৰভেদ থাকিব অথবা ΔQAN ৰ $\angle A$ ৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বিলাকৰ কি প্ৰভেদ থাকিব?



চিত্ৰ 8.6

ইয়াৰ উত্তৰৰ বাবে এতিয়া ত্ৰিভুজ কেইটালৈ চোৱা। ΔPAM আৰু ΔCAB সদৃশনে? অনুচ্ছেদ 6 ৰ পৰা 'কোণ কোণ' সাদৃশ্য চৰ্ত মনত পেলোৱা। এই চৰ্তৰপৰা দেখা পাবা যে ΔPAM আৰু ΔCAB সদৃশ। গতিকে সদৃশ ত্ৰিভুজৰ ধৰ্মৰপৰা পাওঁ যে অনুৰূপ বাহুবিলাক সমানুপাতিক।

গতিকে আমি পাওঁ $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{MP}{BC}$.

ইয়াৰপৰা পাওঁ যে $\dfrac{MP}{AP} = \dfrac{BC}{AC} = \sin A$.

সেইদৰে, $\dfrac{AM}{AP} = \dfrac{AB}{AC} = \cos A$, $\dfrac{MP}{AM} = \dfrac{BC}{AB} = \tan A$, ইত্যাদি।

ইয়াৰপৰা দেখা গ'ল যে ΔPAM ৰ A কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বিলাক ΔCAB ৰ A কোণৰ পৰস্পৰ অনুপাতবিলাকৰে সৈতে বেলেগ নহয়।

একেদৰে তোমালোকে পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা যে sinA ৰ মান (আৰু লগতে আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বিলাকো) ΔQAN ৰ ক্ষেত্ৰতো একে থাকে।

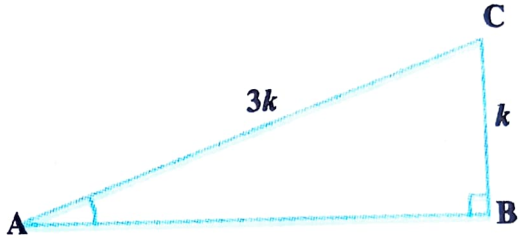
এই পৰ্য্যবেক্ষণৰপৰা এতিয়া স্পষ্ট যে যদি কোণটো একে থাকে তেনেহ'লে ত্ৰিভুজৰ বাহুৰ দৈৰ্ঘ্যৰ পৰিবৰ্তনত এটা কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ পৰিবৰ্তন নঘটে।

টোকা ঃ সুবিধাৰ বাবে, $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ ইত্যাদি ঠাইত আমি ক্ৰমে $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ ইত্যাদি লিখিব পাৰোঁ। কিন্তু $\operatorname{cosec} A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ । ইয়াত $\sin^{-1} A$ ক 'sin inverse A'

বুলি পঢ়া হয়। $\sin^{-1}A$ৰ এটা বেলেগ অৰ্থ আছে যিটো তোমালোকে ওপৰৰ শ্ৰেণীত পঢ়িবলৈ পাবা। এই কথাখিনি আন কেইটা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ ক্ষেত্ৰটো প্ৰযোজ্য। কেতিয়াবা গ্ৰীক আখৰ 'θ' (theta) কো কোণ বুজাবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

আমি এটা সূক্ষ্ম কোণৰ 6 টা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ সংজ্ঞা দিলোঁ। যদি আমি যিকোনো এটা অনুপাত জানো তেনেহ'লে অন্য অনুপাতকেইটা উলিয়াব পাৰিমনে? বাৰু, এইটো আমি চাওঁ।

যদি ABC সমকোণী ত্ৰিভুজটোত $\sin A = \frac{1}{3}$, তেন্তে ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ অৰ্থাৎ, ABC ত্ৰিভুজৰ BC আৰু AC বাহুদুটাৰ দীঘৰ অনুপাত 1 : 3 (চিত্ৰ 8.7 চোৱা)। সেয়ে, যদি $BC = k$, তেন্তে AC হ'ব $3k$, য'ত k হ'ল এটা ধনাত্মক সংখ্যা। এতিয়া A কোণৰ অন্যকেইটা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত উলিয়াবৰ কাৰণে আমি তৃতীয় বাহু AB ৰ দীঘ উলিয়াব লাগিব। তোমালোকৰ পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যটো মনত আছেনে? ইয়াৰ সহায়ত AB ৰ দীঘ উলিয়াব লাগিব।



চিত্ৰ 8.7

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}\,k)^2$$

গতিকে, $AB = \pm 2\sqrt{2}\,k$

গতিকে, আমি লওঁ $AB = 2\sqrt{2}\,k$ (আমি $-2\sqrt{2}\,k$ কিয় নল'লো?)

এতিয়া, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}\,k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

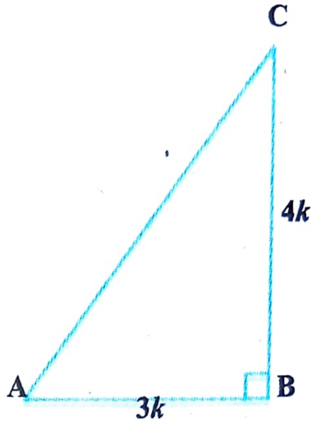
একেদৰে তোমালোকে A কোণৰ আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত বিলাক উলিয়াব পাৰিবা।

মন্তব্য ঃ যিহেতু এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ অতিভুজডালেই দীৰ্ঘতম বাহু, গতিকে $\sin A$ বা $\cos A$ৰ মান সদায় 1তকৈ সৰু (বা বিশেষ ক্ষেত্ৰত 1ৰ সমান হ'ব পাৰে)। বাৰু এতিয়া কেইটামান উদাহৰণ লোৱা হ'ল।

উদাহৰণ 1 ঃ যদি $\tan A = \frac{4}{3}$, তেন্তে A কোণৰ আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবোৰ উলিওৱা।

সমাধান ঃ প্ৰথমে ΔABC সমকোণী ত্ৰিভুজটো অংকন কৰা হ'ল (চিত্ৰ 8.8)। এতিয়া আমি জানো যে $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$.

গতিকে, যদি BC = $4k$, তেন্তে AB = $3k$, য'ত k এটা ধনাত্মক সংখ্যা।



চিত্ৰ 8.8

এতিয়া পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত আমি পাওঁ,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

গতিকে, AC = $5k$

এতিয়া আমি সংজ্ঞাৰ সহায়ত গোটেইকেইটা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত লিখিব পাৰিম

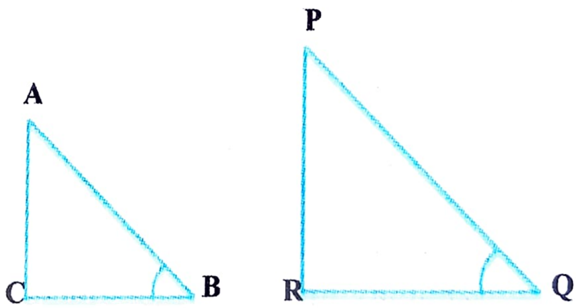
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}, \quad \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

গতিকে, $\cot A = \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A} = \dfrac{5}{4}$

আৰু $\sec A = \dfrac{1}{\cos A} = \dfrac{5}{3}$.

উদাহৰণ 2 ঃ যদি $\angle B$ আৰু $\angle Q$ সূক্ষ্ম কোণ দুটা এনে ধৰণৰ যে $\sin B = \sin Q$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\angle B = \angle Q$.

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল ABC আৰু PQR দুটা সমকোণী ত্ৰিভুজ আৰু $\sin B = \sin Q$ (চিত্ৰ 8.9 চোৱা)



চিত্ৰ 8.9

আমি পাওঁ, $\sin B = \dfrac{AC}{AB}$

আৰু $\sin Q = \dfrac{PR}{PQ}$

সেয়েহে, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{PR}{PQ}$

গতিকে, $\dfrac{AC}{PR} = \dfrac{AB}{PQ} = k$ (ধৰাহ'ল) ..... (1)

এতিয়া, পাইথাগোৰাচৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} \text{ আৰু } QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

গতিকে, $\dfrac{BC}{QR} = \dfrac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}}$

$$= \frac{\sqrt{k^2 PQ^2 - k^2 PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}}$$

$$= \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \qquad \text{..... (2)}$$

এতিয়া (1) আৰু (2) ৰ পৰা আমি পাওঁ যে,

$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

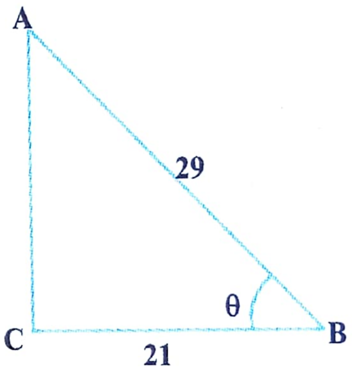
সেয়েহে, উপপাদ্য 6.4 ৰ পৰা পাওঁ যে $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$ আৰু সেই গতিকে, $\angle B = \angle Q$.

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰাহ'ল ΔACB ৰ C কোণ সমকোণ আৰু AB = 29 একক, BC = 21 একক আৰু $\angle ABC = \theta$ (চিত্ৰ 8.10 চোৱা)।

তলত দিয়া মানবোৰ নিৰ্ণয় কৰা-

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$,

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$.



চিত্ৰ 8.10

সমাধান ঃ ΔACB ৰ পৰা আমি পাওঁ,

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$

$$= \sqrt{(29-21)(29+21)}$$

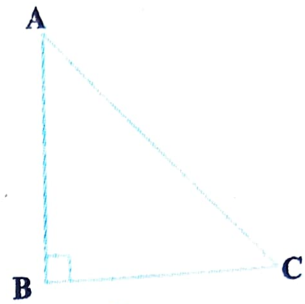
$$= \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ একক।}$$

গতিকে, $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}$, $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$.

এতিয়া, (i) ৰ বাবে, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{20^2 + 21^2}{29^2} = \frac{400 + 441}{841} = 1$,

আৰু (ii) ৰ বাবে, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841}$.

উদাহৰণ 4 ঃ ABC ত্ৰিভুজৰ যদি B কোণ সমকোণ আৰু $\tan A = 1$, তেন্তে দেখুওৱা যে $2\sin A\cos A = 1$.



চিত্ৰ 8.11

সমাধান ঃ ΔABC ৰ পৰা, $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$ (চিত্ৰ 8.11 চোৱা)।

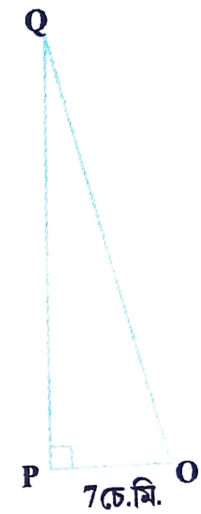
অৰ্থাৎ, $BC = AB$

ধৰাহ'ল $BC = AB = k$, ইয়াত k এটা ধনাত্মক সংখ্যা।

এতিয়া, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$

গতিকে, $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ আৰু $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সেয়ে, $2 \sin A \cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$, ইয়েই উলিয়াব লগা মান।



চিত্ৰ 8.12

উদাহৰণ 5 ঃ ΔOPQ ৰ P সমকোণ আৰু $OP = 7cm$ আৰু $OQ - PQ = 1cm$ (চিত্ৰ 8.12 চোৱা)। $\sin Q$ আৰু $\cos Q$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ ΔOPQ ৰ পৰা পাওঁ, $OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

অৰ্থাৎ, $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (কিয়?)

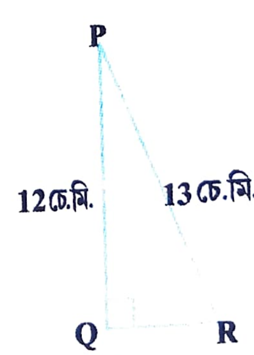
অৰ্থাৎ, $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

অৰ্থাৎ, $1 + 2PQ = 7^2$ (কিয়?)

অৰ্থাৎ, $PQ = 24cm$ আৰু $OQ = 1 + PQ = 25cm$

গতিকে, $\sin Q = \frac{7}{25}$ আৰু $\cos Q = \frac{24}{25}$.

অনুশীলনী 8.1



চিত্ৰ 8.13

1. ΔABC ত্ৰিভুজৰ B কোণ সমকোণ আৰু $AB = 24cm$, $BC=7cm$ হ'লে তলত দিয়াবিলাক উলিওৱাঃ
   (i) $\sin A, \cos A$
   (ii) $\sin C, \cos C$
2. চিত্ৰ 8.13 ৰ পৰা $\tan P - \cot R$ নিৰ্ণয় কৰা।
3. যদি $\sin A = \frac{3}{4}$, তেন্তে $\cos A$ আৰু $\tan A$ উলিওৱা।
4. দিয়া আছে যে, $15 \cot A = 8$, তেন্তে $\sin A$ আৰু $\sec A$ উলিওৱা।
5. দিয়া আছে যে, $\sec\theta = \frac{13}{12}$, আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবোৰ গণনা কৰা।

6. যদি $\angle A$ আৰু $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ হয় যাতে $\cos A = \cos B$, তেন্তে দেখুওৱা যে $\angle A = \angle B$.

7. যদি $\cot\theta = \frac{7}{8}$, তেন্তে মান উলিওৱা

(i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$,

(ii) $\cot^2\theta$

8. যদি $3\cot A = 4$, তেন্তে $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ হ'বনে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

9. ΔABC ৰ B কোণ সমকোণ। যদি $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, তেন্তে তলৰ মান বিলাক উলিওৱা

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

10. ΔPQR ৰ Q কোণ সমকোণ আৰু $PR + QR = 25cm$ আৰু $PQ = 5cm$. $\sin P$, $\cos P$ আৰু $\tan P$ ৰ মান উলিওৱা।

11. তলত দিয়াবিলাক সত্য নে অসত্য কোৱা। তোমাৰ উত্তৰৰ যথাৰ্থতা উল্লেখ কৰা

(i) $\tan A$ ৰ মান সদায় 1 তকৈ সৰু।

(ii) A কোণৰ কোনো মানৰ বাবে $\sec A = \frac{12}{5}$

(iii) 'cosecant of angle A' ৰ সংক্ষিপ্ত ৰূপ হিচাপে $\cos A$ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

(iv) cot আৰু A ৰ পূৰণফল হ'ল $\cot A$.

(v) কোনো এটা কোণ 'θ' ৰ বাবে $\sin\theta = \frac{4}{3}$

8.3 কেইটামান বিশেষ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Some Specific Angles)

জ্যামিতিৰ পৰা ইতিমধ্যে তোমালোকে 30°, 45°, 60° আৰু 90° কোণৰ অংকন পদ্ধতিৰ বিষয়ে জানা। এই অনুচ্ছেদত এই কোণবিলাকৰ, আৰু লগতে 0° কোণৰো, ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ মানবিলাক নিৰ্ণয় কৰিম।

45° কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত

ΔABC ৰ B কোণটো সমকোণ আৰু যদি আন দুটাৰ এটা কোণ 45° হয় তেন্তে ইটো কোণো

$45°$ হ'ব, অৰ্থাৎ, $\angle A = \angle C = 45°$ (চিত্ৰ 8.14 চোৱা)।

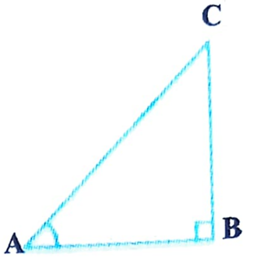
গতিকে $BC = AB$ (কিয়?)

এতিয়া, ধৰা হ'ল $BC = AB = a$.

সেয়ে, পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$,

গতিকে, $AC = a\sqrt{2}$.



চিত্ৰ 8.14

এতিয়া ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ সংজ্ঞাৰপৰা পাওঁ যে—

$$\sin 45° = \frac{45° \text{ কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{45° \text{ কোণৰ সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{45° \text{ কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{45° \text{ কোণৰ সন্নিহিত বাহু}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

তদুপৰি, $\operatorname{cosec} 45° = \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$,

$$\sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2},$$

$$\cot 45° = \frac{1}{\tan 45°} = 1.$$

30° আৰু 60° কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত

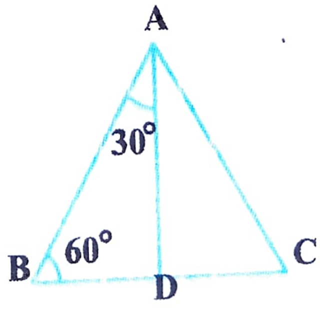
এতিয়া আমি $30°$ আৰু $60°$ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত গণনা কৰিম। ABC সমবাহু ত্ৰিভুজটো লোৱা। যিহেতু এটা সমবাহু ত্ৰিভুজৰ প্ৰতিটো কোণেই $60°$, গতিকে $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

A বিন্দুৰপৰা BC বাহুৰ ওপৰত AD লম্ব টনা হ'ল (চিত্ৰ 8.15 চোৱা)।

এতিয়া, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (কিয়?)

এতেকে, $BD = DC$

আৰু $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)



চিত্ৰ 8.15

এতিয়া মন কৰা যে,

ΔABD সমকোণী আৰু D কোণ সমকোণ।

ইয়াত $\angle BAD = 30°$ আৰু $\angle ABD = 60°$ (চিত্ৰ 8.15 চোৱা)।

তোমালোকে জানা যে ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ বাবে আমাক ত্ৰিভুজ এটাৰ বাহু বিলাকৰ দীঘ লাগে। গতিকে ধৰাহ'ল $AB = 2a$.

সেয়ে, $BD = \frac{1}{2}BC = a$ আৰু $AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2$,

গতিকে, $AD = a\sqrt{3}$

এতিয়া আমি পাওঁ, $\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$,

$$\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

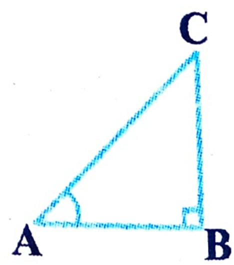
তদুপৰি, $\text{cosec}\,30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2$, $\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3}$.

একেদৰে, $\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\tan 60° = \sqrt{3}$,

$$\text{cosec}\,60° = \frac{2}{\sqrt{3}},\ \sec 60° = 2 \text{ আৰু } \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

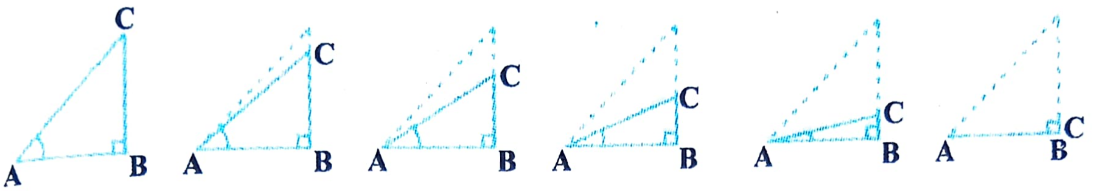
0° আৰু 90° কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত

যদি ABC সমকোণী ত্ৰিভুজটোৰ A কোণটোকে ক্ৰমান্বয়ে সৰু কৰি গৈ থকা যায় আৰু এই কামটো A কোণটো শূন্য হোৱালৈকে কৰি থকা হয়, তেতিয়া A কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবোৰ কি হয় চোৱা যাওঁক (চিত্ৰ 8.16 চোৱা)।



চিত্ৰ 8.16

যিহেতু A কোণৰ মানটো ক্ৰমে সৰু হৈ যায়, সেয়ে BC বাহুৰ দীঘো কমি আহে। এইদৰে C বিন্দুটো B ৰ কাষ চাপি আহি অৱশেষত A কোণটো 0° ৰ প্ৰায় ওচৰ চাপে আৰু AC প্ৰায় AB ৰ সমান হয় (চিত্ৰ 8.17)।



চিত্ৰ 8.17

যেতিয়া $\angle A$ ৰ মান প্ৰায় $0°$ ৰ ওচৰ চাপে তেতিয়া BC ৰ দীঘ প্ৰায় 0 ৰ সমান হয় আৰু সেয়ে $\sin A = \frac{BC}{AC}$ ৰ মান প্ৰায় 0 ৰ সমান হয়। আকৌ $\angle A$ ৰ মান $0°$ ৰ ওচৰ চপাৰ লগে লগে AC আৰু AB প্ৰায় সমান হয় আৰু সেয়ে $\cos A = \frac{AB}{AC}$ ৰ মান প্ৰায় 1ৰ সমান হয়।

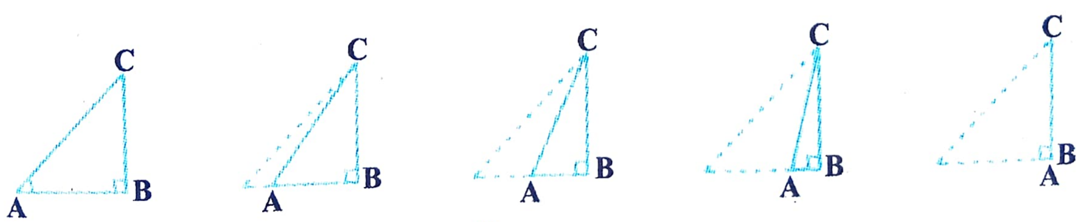
ইয়েই আমাক $A = 0°$ হওঁতে sinA আৰু cosA ৰ মানৰ সংজ্ঞা দিয়াত সহায় কৰিছে। আমি এতিয়া কওঁ যে, $\sin 0° = 0$ আৰু $\cos 0° = 1$.

ইয়াৰপৰাই আমি পাওঁ, $\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0$,

$\cot 0° = \frac{1}{\tan 0°}$, যিটো সংজ্ঞাবদ্ধ নহয় (কিয়?)

$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1$ আৰু $\operatorname{cosec} 0° = \frac{1}{\sin 0°}$, ইয়ো সংজ্ঞাবদ্ধ নহয় (কিয়?)

এতিয়া $\angle A$ কোণৰ মান ই $90°$ নোহোৱালৈকে বঢ়াই গৈ থাকিলে $\angle A$ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবোৰ কি হয় চোৱা যাওঁক। $\angle A$ ডাঙৰ হৈ যোৱাৰ লগে লগে $\angle C$ ক্ৰমে সৰু হৈ যাব। সেয়ে ওপৰৰ অৱস্থাৰ দৰে, AB বাহুৰ দীঘ কমি কমি গৈ থাকিব। A বিন্দুটো ক্ৰমে Bলৈ চলি যাব। অৱশেষত $\angle A$ যেতিয়া $90°$ৰ অতি ওচৰ চাপিব তেতিয়া $\angle C$ আহি $0°$ ৰ ওচৰ পাব আৰু AC বাহুটো BC ৰ ওপৰত মিলি যাব (চিত্ৰ 8.18 চোৱা)।



চিত্ৰ 8.18

Daily Assam

যেতিয়া $\angle C$, $0°$ ৰ অতি ওচৰ চাপে তেতিয়া $\angle A$, $90°$ ৰ অতি ওচৰ চাপে আৰু AC প্ৰায় BC ৰ সমান হয়। গতিকে sinAৰ মান 1 ৰ অতি ওচৰ চাপে। আকৌ $\angle A$ যেতিয়া $90°$ ৰ অতি ওচৰ চাপে তেতিয়া $\angle C$, $0°$ ৰ অতি ওচৰ চাপে আৰু ফলত AB ৰ দীঘ প্ৰায় শূন্য হয়। সেয়ে cosAৰ মান 0ৰ ওচৰ চাপে।

সেয়ে আমি ক'ব পাৰোঁ যে, $\sin 90° = 1$ আৰু $\cos 90° = 0$.

এতিয়া তোমালোকে $90°$ ৰ আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবিলাক নিৰ্ণয় নকৰানো কিয়?

ততালিকে চোৱাৰ সুবিধাৰ্থে, 8.1 তালিকাত $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ আৰু $90°$ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ উল্লেখ কৰা হ'ল।

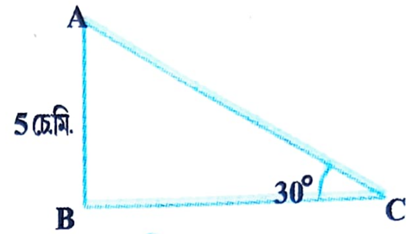
তালিকা 8.1

$\angle A$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়
cosec A	সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়
cot A	সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

মন্তব্য ঃ ওপৰৰ তালিকাৰপৰা তোমালোকে দেখিছা যে $\angle A$ যেতিয়া $0°$ ৰ পৰা $90°$ বাঢ়ি যায় তেতিয়া sinA ৰ মান 0 ৰ পৰা 1লৈ বাঢ়ে আৰু cosA ৰ মান 1 ৰ পৰা 0 লৈ কমে।

কিছুমান উদাহৰণৰ সহায়ত ওপৰত দিয়া তালিকাৰ মানসমূহৰ ব্যৱহাৰৰ ব্যাখ্যা আগবঢ়াম।

উদাহৰণ 6 ঃ ΔABC ত্ৰিভুজৰ B কোণটো সমকোণ, $AB = 5cm$ আৰু $\angle ACB = 30^\circ$ (চিত্ৰ 8.19 চোৱা)। BC আৰু AC বাহুৰ দীঘ উলিওৱা।



চিত্ৰ 8.19

সমাধান ঃ BC বাহুৰ দীঘ উলিয়াবলৈ আমি BC আৰু প্ৰদত্ত AB বাহু জড়িত থকা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতটো ল'ম। যিহেতু BC বাহুটো C কোণৰ সন্নিহিত বাহু আৰু AB বাহুটো C কোণৰ বিপৰীত বাহু, গতিকে, $\frac{AB}{BC} = \tan C$ অৰ্থাৎ, $\frac{5}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ইয়াৰপৰা পাওঁ যে $BC = 5\sqrt{3}$ cm

আকৌ AC বাহুৰ দীঘ উলিয়াবলৈ আমি লওঁ

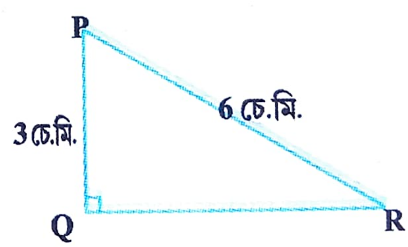
$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} \qquad \text{(কিয় ?)}$$

অৰ্থাৎ, $\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$, অৰ্থাৎ, $AC = 10$ cm

মন কৰিবা যে বিকল্প পদ্ধতি হিচাপে পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰপৰা তৃতীয় বাহুৰ দীঘ পাব পাৰি।

অৰ্থাৎ, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}$ cm $= 10$cm.

উদাহৰণ 7 ঃ ΔPQR ত্ৰিভুজৰ Q কোণটো 90° (চিত্ৰ 8.20 চোৱা)। যদি $PQ = 3cm$ আৰু $PR = 6cm$ তেন্তে $\angle QPR$ আৰু $\angle PRQ$ নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 8.20

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে $PQ = 3cm$

আৰু $PR = 6cm$.

গতিকে, $\frac{PQ}{PR} = \sin R$ বা $\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

গতিকে, $\angle PRQ = 30^\circ$ আৰু সেয়ে

$\angle QPR = 60^\circ$ (কিয় ?)

তোমালোকে মন কৰিব পাৰা যে যদি তিনিটা বাহুৰ যিকোনো এটা বাহু আৰু আন যিকোনো এটা অংগ (এটা সূক্ষ্ম কোণ অথবা আন এটা বাহু) আমি জানো, তেনেহ'লে সমকোণী ত্ৰিভুজটোৰ অৱশিষ্ট কোণ আৰু বাহু উলিয়াব পাৰি।

উদাহৰণ 8 ঃ যদি $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, য'ত $0° < A + B \le 90°$, আৰু $A > B$, তেনেহ'লে A আৰু B নির্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ যিহেতু $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, গতিকে, $A - B = 30°$ (কিয়?) ..... (1)

আকৌ, যিহেতু $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, গতিকে, $A + B = 60°$ (কিয়?) ..... (2)

(1) আৰু (2)ক সমাধা কৰি আমি পাওঁ যে $A = 45°$ আৰু $B = 15°$.

অনুশীলনী 8.2

1. তলত দিয়া বিলাকৰ মান উলিওৱা —

(i) $\sin 60° \cos 30° + \sin 30° \cos 60°$

(ii) $2 \tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

(iii) $\dfrac{\cos 45°}{\sec 30° + \operatorname{cosec} 30°}$ (iv) $\dfrac{\sin 30° + \tan 45° - \operatorname{cosec} 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

(v) $\dfrac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$ (vi) $\dfrac{\operatorname{cosec} 30° + \operatorname{cosec} 60° + \operatorname{cosec} 90°}{\sec 0° + \sec 30° + \sec 60°}$

2. শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা আৰু তোমাৰ বাছনিৰ যথার্থতা উল্লেখ কৰা

(i) $\dfrac{2\tan 30°}{1 + \tan^2 30°} =$

(A) $\sin 60°$ (B) $\cos 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

(ii) $\dfrac{1 - \tan^2 45°}{1 + \tan^2 45°} =$

(A) $\tan 90°$ (B) 1 (C) $\sin 45°$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2 \sin A$ সত্য যেতিয়া $A =$

(A) $0°$ (B) $30°$ (C) $45°$ (D) $60°$

(iv) $\dfrac{2\tan 30°}{1 - \tan^2 30°} = ?$

(A) $\cos 60°$ (B) $\sin 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

3. (i) যদি $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ আৰু $\tan(A - B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $0° < A + B \le 90°$; $A > B$, তেন্তে A আৰু B উলিওৱা।

(ii) যদি $\sin(x + y) = 1$, $\cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ আৰু $x > y$, $0^0 \leq x + y \leq 90^0$ তেন্তে x আৰু y নিৰ্ণয় কৰা।

4. তলত দিয়াবিলাক সত্য নে অসত্য কোৱা। তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি দাঙি ধৰা

(i) $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$.

(ii) $\sin\theta$ ৰ মান বাঢ়ি যায় যদি θ ৰ মান বাঢ়ে।

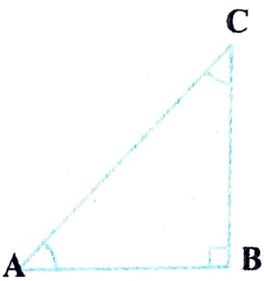
(iii) $\cos\theta$ ৰ মান বাঢ়ি যায় যদি θ ৰ মান বাঢ়ে।

(iv) θ ৰ সকলো মানৰ বাবে $\sin\theta = \cos\theta$

(v) $A = 0°$ ৰ বাবে $\cot A$ সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়।

8.4 পূৰক কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Complementary Angles)

মনত পেলোৱা যে দুটা কোণক পূৰক কোণ বুলি কোৱা হয় যেতিয়া সিহঁতৰ যোগফল 90° হয়। ABC সমকোণী ত্ৰিভুজৰ যদি B কোণ সমকোণ, তেনেহ'লে ইয়াৰ কোনোবা এযোৰ কোণ পূৰক কোণ হ'বনে? (চিত্ৰ 8.21 চোৱা)।



চিত্ৰ 8.21

যিহেতু $\angle A + \angle C = 90°$ গতিকে, ইহঁত তেনে এটা যোৰ।

আমি জানো যে,

$$\left.\begin{array}{l} \sin A = \frac{BC}{AC}, \cos A = \frac{AB}{AC}, \tan A = \frac{BC}{AB}, \\ \operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC}, \sec A = \frac{AC}{AB}, \cot A = \frac{AB}{BC} \end{array}\right\} \quad ...(1)$$

এতিয়া আমি $\angle C = 90° - \angle A$ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতবিলাক লিখিম— $90° - A$ কোণৰ বিপৰীত বাহু আৰু সন্নিহিত বাহু দুটা কি কি? তোমালোকে পাবা যে $90° - \angle A$ কোণৰ বিপৰীত বাহুটো AB আৰু সন্নিহিত বাহুটো BC। গতিকে,

$$\left.\begin{array}{l} \sin(90° - A) = \frac{AB}{AC}, \cos(90° - A) = \frac{BC}{AC}, \tan(90° - A) = \frac{AB}{BC} \\ \operatorname{cosec}(90° - A) = \frac{AC}{AB}, \sec(90° - A) = \frac{AC}{BC}, \cot(90° - A) = \frac{BC}{AB} \end{array}\right\} \quad ...(2)$$

Daily Assam

এতিয়া, (1) আৰু (2) ৰ অনুপাতবিলাক তুলনা কৰিলে দেখিবা যে

$\sin(90° - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A$ আৰু $\cos(90° - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A$

$\tan(90° - A) = \frac{AB}{BC} = \cot A$, $\cot(90° - A) = \frac{BC}{AB} = \tan A$

$\sec(90° - A) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90° - A) = \frac{AC}{AB} = \sec A$

গতিকে, $\mathbf{\sin(90° - A) = \cos A}$, $\mathbf{\cos(90° - A) = \sin A}$,

$\mathbf{\tan(90° - A) = \cot A}$, $\mathbf{\cot(90° - A) = \tan A}$,

$\mathbf{\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A}$, $\mathbf{\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A}$

এই কেইটা 0° আৰু 90° ৰ মাজত থকা A কোণৰ সকলো মানৰ বাবেই সত্য। তোমালোকে A = 0° আৰু A = 90° ৰ বাবে এইকেইটা সত্য হয়নে পৰীক্ষা কৰি চোৱা।

টোকা ঃ $\tan 0° = 0 = \cot 90°$, $\sec 0° = 1 = \operatorname{cosec} 90°$; কিন্তু $\sec 90°$, $\operatorname{cosec} 0°$, $\tan 90°$ আৰু $\cot 0°$ ৰ মান সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়। তলত আমি কেইটামান উদাহৰণ ল'লো।

উদাহৰণ 9 ঃ $\frac{\tan 65°}{\cot 25°}$ ৰ মান উলিওৱা।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $\cot A = \tan(90° - A)$

গতিকে, $\cot 25° = \tan(90° - 25°) = \tan 65°$

অৰ্থাৎ, $\frac{\tan 65°}{\cot 25°} = \frac{\tan 65°}{\tan 65°} = 1$

উদাহৰণ 10 ঃ যদি $\sin 3A = \cos(A - 26°)$, য'ত 3A সূক্ষ্ম কোণ, তেন্তে A উলিওৱা।

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে $\sin 3A = \cos(A - 26°)$. ..... (1)

যিহেতু, $\sin 3A = \cos(90° - 3A)$, গতিকে আমি (1) ক তলত দিয়াৰ দৰে লিখিব পাৰো $\cos(90° - 3A) = \cos(A - 26°)$.

যিহেতু $90° - 3A$ আৰু $A - 26°$ দুয়োটাই সূক্ষ্মকোণ, গতিকে $90° - 3A = A - 26°$

ইয়াৰ পৰা পাওঁ $A = 29°$

উদাহৰণ 11 ঃ $\cot 85° + \cos 75°$ ক 0° আৰু 45° কোণৰ মাজৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতত প্ৰকাশ কৰা।

সমাধান ঃ $\cot 85° + \cos 75° = \cot(90° - 5°) + \cos(90° - 15°) = \tan 5° + \sin 15°$

অনুশীলনী 8.3

1. মান নিৰ্ণয় কৰা

(i) $\frac{\sin 18°}{\cos 72°}$ (ii) $\frac{\tan 26°}{\cot 64°}$ (iii) $\cos 48° - \sin 42°$ (iv) $\operatorname{cosec} 31° - \sec 59°$

(v) $\sin 35^\circ \sin 55^\circ - \cos 35^\circ \cos 55^\circ$ (vi) $\tan 35^\circ \tan 60^\circ \tan 55^\circ \tan 30^\circ$

(vii) $\dfrac{\cot 54^\circ}{\tan 36^\circ} + \dfrac{\tan 20^\circ}{\cot 70^\circ} - 2$ (viii) $3\dfrac{\sin 23^\circ}{\cos 67^\circ} + 4\dfrac{\sec 47^\circ}{\operatorname{cosec} 43^\circ}$

(ix) $\tan 5^\circ \tan 25^\circ \tan 30^\circ \tan 65^\circ \tan 85^\circ$

2. দেখুওৱা যে

(i) $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

(ii) $\cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ = 0$

3. যদি $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, য'ত 2A সূক্ষ্মকোণ, তেন্তে A ৰ মান উলিওৱা।

4. যদি $\tan A = \cot B$, প্ৰমাণ কৰা যে $A + B = 90^\circ$.

5. যদি $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$, য'ত 4A সূক্ষ্মকোণ, তেন্তে A ৰ মান উলিওৱা।

6. যদি A, B আৰু C কোণকেইটা ABC ত্ৰিভুজৰ অন্তঃকোণ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\sin\left(\frac{B + C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}.$$

7. $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ ক 0° আৰু 45° ৰ মাজৰ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত হিচাপে প্ৰকাশ কৰা।

8. (i) যদি $\sec 5\theta = \operatorname{cosec}(\theta - 36^0)$ য'ত θ এটা সূক্ষ্মকোণ। তেন্তে θ ৰ মান উলিওৱা।

(ii) যদি $\sin A = \cos 33^\circ$, $A < 90^0$। A ৰ মান উলিওৱা।

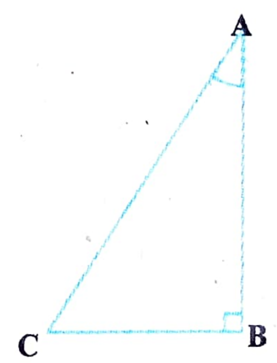
(iii) $\sin 2A = \cos(A + 15^\circ)$ য'ত $2A < 90^\circ$। Aৰ মান উলিওৱা।

(iv) যদি $\sin(3x + 10) = \cos(x + 24)$ তেন্তে x ৰ মান উলিওৱা।

8.5. ত্ৰিকোণমিতিক অভেদাৱলী (Trigonometric Identities)

তোমালোকৰ মনত থাকিব পাৰে যে এটা সমীকৰণক অভেদ বুলি কোৱা হ'ব যদিহে তাত থকা চলকবোৰৰ সকলো মানৰ বাবেই সমীকৰণটো সত্য হয়। একেদৰে কোনো কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত জড়িত থকা এটা সমীকৰণক **ত্ৰিকোণমিতিক অভেদ (trigonometric identity)** বুলি কোৱা হব যদিহে কোণৰ সকলো মানৰ বাবেই ই সত্য হয়।

এই অনুচ্ছেদত আমি এটা দৰকাৰী ত্ৰিকোণমিতিক অভেদ প্ৰমাণ কৰিম।



চিত্ৰ 8.22

ΔABC ত্ৰিভুজৰ B কোণ সমকোণ (চিত্ৰ 8.22 চোৱা)।

ইয়াৰ পৰা পাওঁ যে $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ..... (1)

(1) ৰ প্ৰতিটো পদক AC^2 ৰে হৰণ কৰাত

$$\frac{AB^2}{AC^2}+\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{AC^2}{AC^2}$$

অৰ্থাৎ, $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\left(\frac{BC}{AC}\right)^2=\left(\frac{AC}{AC}\right)^2$

অৰ্থাৎ, $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$

অৰ্থাৎ, $\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1}$ ..... (2)

ই A ৰ সকলো মানৰ বাবেই সত্য, যেতিয়া $0° \le A \le 90°$। গতিকে ইয়াত ত্ৰিকোণমিতিক অভেদ বোলে।

এতিয়া (1) ক AB^2 ৰে হৰণ কৰিলে পাওঁ যে

$$\frac{AB^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{AC^2}{AB^2}$$

বা, $\left(\frac{AB}{AB}\right)^2+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$

অৰ্থাৎ, $\mathbf{1 + \tan^2 A = \sec^2 A}$ ..... (3)

এই সমীকৰণটো $A = 0°$ ৰ বাবে সত্য হয়নে? হয়, ই সত্য। $A = 90°$ হ'লে কি হ'ব? ইয়াত $A = 90°$ হ'লে tanA আৰু secA সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়। গতিকে (3) টো সত্য হোৱাৰ ক্ষেত্ৰত A ৰ মান হ'ব $0° \le A < 90°$.

এতিয়া (1) নং সমীকৰণক BC^2 ৰে হৰণ কৰিলে কি পাওঁ চাওঁ।

$$\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{BC^2}{BC^2}=\frac{AC^2}{BC^2}$$

অৰ্থাৎ, $\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+\left(\frac{BC}{BC}\right)^2=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$

অৰ্থাৎ, $\mathbf{\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A}$ ..... (4)

মনত ৰাখিবা যে $A = 0°$ হ'লে cosecA আৰু cotA সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়। গতিকে (4) টো সত্য হোৱাৰ ক্ষেত্ৰত A ৰ মান হ'ব $0° < A \le 90°$.

এই অভেদসমূহ ব্যৱহাৰ কৰি আমি প্ৰতিটো ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতকে আন ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতত প্ৰকাশ কৰিব পাৰোঁ। অৰ্থাৎ যদি যিকোনো এটা অনুপাত জানো তেতিয়াহ'লে আমি আনবিলাক ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ মান উলিয়াব পাৰিম।

এই অভেদবিলাক ব্যৱহাৰ কৰি কেনেকৈ অংক কৰিব পাৰি এতিয়া চাওঁ। আমি জানো যে

$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ । গতিকে $\cot A = \sqrt{3}$ ।

যিহেতু, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$,

গতিকে, $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, আৰু $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

আকৌ, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. গতিকে, $\operatorname{cosec} A = 2$.

উদাহৰণ 12 : $\cos A$, $\tan A$ আৰু $\sec A$ অনুপাত কেইটাক $\sin A$ ৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা।

সমাধান : যিহেতু $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, গতিকে, $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, অৰ্থাৎ,

$\cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$

ইয়াৰ পৰা পাওঁ, $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ (কিয়?)

গতিকে, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$ আৰু $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$

উদাহৰণ 13 : প্ৰমাণ কৰা যে $\sec A\,(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$.

সমাধান : বাওঁপক্ষ $= \sec A\,(1 - \sin A)(\sec A + \tan A)$

$$= \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1$$ = সোঁপক্ষ।

উদাহৰণ 14 : প্ৰমাণ কৰা যে, $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

সমাধান : বাওঁপক্ষ $= \frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$$= \frac{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\cos A\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\sin A} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sin A} + 1\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1} = \text{সোঁপক্ষ।}$$

উদাহৰণ 15 : $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ এই অভেদটোৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে $\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$

সমাধান : যিহেতু আমি $\sec\theta$ আৰু $\tan\theta$ জড়িত থকা অভেদটো প্ৰয়োগ কৰিব লাগিব, গতিকে আমি প্ৰমাণ কৰিব লগা অভেদটোৰ বাওঁপক্ষৰ হৰ আৰু লবক $\cos\theta$ ৰে হৰণ কৰি পদসমূহ $\sec\theta$ আৰু $\tan\theta$ লৈ ৰূপান্তৰ কৰি লব লাগিব।

এতিয়া, বাওঁপক্ষ $= \frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1}$

$$= \frac{\tan \theta - 1 + \sec \theta}{\tan \theta + 1 - \sec \theta}$$

$$= \frac{(\tan \theta + \sec \theta) - 1}{(\tan \theta - \sec \theta) + 1}$$

$$= \frac{\{(\tan \theta + \sec \theta) - 1\}\,(\tan \theta - \sec \theta)}{\{(\tan \theta - \sec \theta) + 1\}\,(\tan \theta - \sec \theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2 \theta - \sec^2 \theta) - (\tan \theta - \sec \theta)}{\{\tan \theta - \sec \theta + 1\}\,(\tan \theta - \sec \theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan \theta + \sec \theta}{(\tan \theta - \sec \theta + 1)\,(\tan \theta - \sec \theta)}$$

$$= \frac{-1}{\tan \theta - \sec \theta} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta},$$

= সোঁপক্ষ, ইয়েই নিৰ্ণেয় প্ৰমাণ।

অনুশীলনী 8.4

1. sinA, secA আৰু tanA এই ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত কেইটাক cotA ৰ দ্বাৰা প্ৰকাশ কৰা।
2. secA ৰ সহায়ত $\angle A$ কোণৰ আন সকলোবিলাক ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত লিখা।
3. মান নিৰ্ণয় কৰা—

(i) $\dfrac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$ (ii) $\sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ$

4. শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা। তোমাৰ বাছনিৰ যথাৰ্থতা সাব্যস্ত কৰা

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A =$

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta) =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

(A) secA (B) sinA (C) cosecA (D) cosA

(iv) $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} =$

(A) $\sec^2 A$ (B) –1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

5. তলৰ অভেদ কেইটা প্ৰমাণ কৰা যদিহে ইয়াত কোণ বিলাক সূক্ষ্ম কোণ আৰু যাৰ বাবে অভেদ কেইটা সংজ্ঞাবদ্ধ হয়—

(i) $(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \dfrac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}$ (ii) $\dfrac{\cos A}{1+\sin A} + \dfrac{1+\sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

(iii) $\dfrac{\tan \theta}{1-\cot \theta} + \dfrac{\cot \theta}{1-\tan \theta} = 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$

[ইংগিত ঃ ইয়াত থকা পদবোৰ $\sin\theta$ আৰু $\cos\theta$ ত প্ৰকাশ কৰা]

(iv) $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ [ইংগিত ঃ বাওঁপক্ষ আৰু সোঁপক্ষ বেলেগে সৰল কৰা।]

(v) $\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$, $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ অভেদৰ সহায়ত কৰা।

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ (vii) $\dfrac{\sin \theta - 2\sin^3 \theta}{2\cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[ইংগিত ঃ বাওঁপক্ষ আৰু সোঁপক্ষ বেলেগে সৰল কৰা]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

6. প্ৰমাণ কৰা ঃ

(i) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(ii) $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

(iii) $\sqrt{\dfrac{\sec\theta - 1}{\sec\theta + 1}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$

(iv) $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

(v) $\dfrac{1}{1+\sin\theta} + \dfrac{1}{1-\sin\theta} = 2\sec\theta$

8.6. সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলত দিয়া কথাখিনি অধ্যয়ন কৰিলা—

1. ABC সমকোণী ত্ৰিভুজৰ B কোণ সমকোণ হ'লে-

$\sin A = \dfrac{\text{A কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$, $\cos A = \dfrac{\text{A কোণৰ সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$,

$\tan A = \dfrac{\text{A কোণৰ বিপৰীত বাহু}}{\text{A কোণৰ সন্নিহিত বাহু}}$

2. $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$; $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$.

3. যদি এটা সূক্ষ্মকোণৰ যিকোনো এটা ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাত জনা থাকে তেনেহ'লে এই কোণটোৰ অৱশিষ্ট অনুপাতকেইটা সহজেই উলিয়াব পাৰি।

4. $0°$, $30°$, $45°$, $60°$ আৰু $90°$ কোণৰ ত্ৰিকোণমিতিক অনুপাতৰ মানসমূহ।

5. sinA আৰু cosA ৰ মান কেতিয়াও 1 তকৈ ডাঙৰ হ'ব নোৱাৰে, কিন্তু secA বা cosecA ৰ মান সদায় 1 তকৈ ডাঙৰ বা 1 ৰ সমান হয়।

6. $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$;
$\tan(90° - A) = \cot A$, $\cot(90° - A) = \tan A$;
$\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A$.

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,
$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$, $0° \leq A < 90°$,
$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$, $0° < A \leq 90°$.