

স্থানাংক জ্যামিতি (Coordinate Geometry)

সপ্তম
অধ্যায়

7.1. অৱতাৰণা (Introduction)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে পঢ়ি আহিছা যে এখন সমতলত এটা বিন্দুৰ অৱস্থান জানিবলৈ হ'লে আমাক এযোৰ স্থানাংক অক্ষৰ প্ৰয়োজন হয়। y -অক্ষৰ পৰা এটা বিন্দুৰ দূৰত্বক x -স্থানাংক (x -coordinate) বা ভুজ (abscissa) বুলি কোৱা হয়। x -অক্ষৰ পৰা এটা বিন্দুৰ দূৰত্বক y -স্থানাংক (y -coordinate) বা কোটি (ordinate) বুলি কোৱা হয়। x -অক্ষৰ ওপৰত থকা এটা বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি $(x, 0)$ আৰু y -অক্ষৰ ওপৰত থকা এটা বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি $(0, y)$ ।

এইখিনিতে তোমালোকৰ বাবে এটা খেল দিয়া হ'ল। লেখ কাগজত এযোৰ পৰস্পৰ লম্বভাবে থকা অক্ষ অংকন কৰা। এতিয়া তলত দিয়া বিন্দুসমূহ স্থাপন কৰি নিৰ্দেশ অনুযায়ী সিহঁতক সংযোগ কৰা। A(4, 8) বিন্দুক B(3, 9) ৰ লগত, Bক C(3, 8)ৰ লগত, C ক D(1, 6) ৰ লগত, D ক E(1,5) ৰ লগত, E ক F(3, 3) ৰ লগত, F ক G(6, 3) ৰ লগত, G ক H(8, 5) ৰ লগত, H ক I(8, 6) ৰ লগত, I ক J(6, 8) ৰ লগত, J ক K(6, 9) ৰ লগত, K ক L(5, 8) ৰ লগত, L ক A ৰ লগত সংযোগ কৰা। তাৰ পিছত P(3.5, 7), Q (3, 6) আৰু R(4, 6) ক সংযোগ কৰি এটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰা। আকৌ X(5.5, 7), Y(5, 6) আৰু Z(6, 6) ক সংযোগ কৰি এটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰা। এতিয়া S(4, 5), T(4.5, 4) আৰু U(5, 5) সংযোগ কৰি এটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰা। অৱশেষত Sঅক (0, 5) আৰু (0, 6) ৰ লগত আৰু Uk (9, 5) আৰু (9, 6) ৰ লগত সংযোগ কৰা। তোমালোকে কি চিত্ৰ পালা?

আকৌ তোমালোকে দেখিছা যে $ax + by + c = 0$, (a, b একে সময়তে শূন্য নহয়) আৰ্হিৰ দুটা চলকযুক্ত বৈখিক সমীকৰণক লেখৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰিলে এডাল সৰলৰেখা পোৱা যায়। তদুপৰি দ্বিতীয় অধ্যায়ত তোমালোকে দেখিছা যে $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ৰ লেখটো এটা অধিবৃত্ত (parabola)। দৰাচলতে চিত্ৰৰ জ্যামিতি অধ্যয়ন কৰিবলৈ এক বীজগণিতীয় আহিলা হিচাপে স্থানাংক জ্যামিতিৰ বিকাশ ঘটোৱা হৈছে। ই আমাক বীজগণিত ব্যৱহাৰ কৰি জ্যামিতি অধ্যয়ন কৰাত সহায় কৰে আৰু জ্যামিতিৰ সহায়ত বীজগণিত বুজাত

সহায় কৰে। এই কাৰণেই বিভিন্ন ক্ষেত্ৰত উদাহৰণস্বৰূপে পদাৰ্থবিজ্ঞান, ইঞ্জিনীয়াৰিং, নৌ বিদ্যা, ভূকম্প বিজ্ঞান আৰু কলাত স্থানাংক জ্যামিতিৰ বহুল প্ৰয়োগ কৰা হয়।

এই অধ্যায়ত তোমালোকে দুটা বিন্দুৰ স্থানাংক দিয়া থাকিলে কিদৰে সিহঁতৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা হয় আৰু তিনিটা বিন্দুৰ স্থানাংক জনা থাকিলে ইহঁতে গঠন কৰা ত্ৰিভুজৰ কালি উলিয়াবলৈ শিকিব পাৰিবা। তদুপৰি দুটা প্ৰদত্ত বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক এটা নিৰ্দিষ্ট অনুপাতত ছেদ কৰা বিন্দুটোৰ স্থানাংক কিদৰে নিৰ্ণয় কৰা হয় সেই বিষয়েও পঢ়িবলৈ পাবা।

7.2. দূৰত্ব সূত্ৰ (Distance Formula) :

তলত দিয়া অবস্থাটো মন কৰো আঁহা।

B চহৰখন A চহৰখনৰপৰা 36 কি.মি. পূবত আৰু 15 কি.মি. উত্তৰত অৱস্থিত। এতিয়া জোখমাপ নকৰাকৈ A চহৰৰ পৰা B চহৰৰ দূৰত্ব কেনেকৈ উলিয়াবা? বাকু চাই আঁহা। এই অবস্থাটো লেখ চিত্ৰৰ সহায়ত চিত্ৰ 7.1ত দিয়াৰ দৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। তোমালোকে পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য (Pythagoras Theorem) ব্যৱহাৰ কৰিও এই দূৰত্ব গণনা কৰিব পাৰিবা।

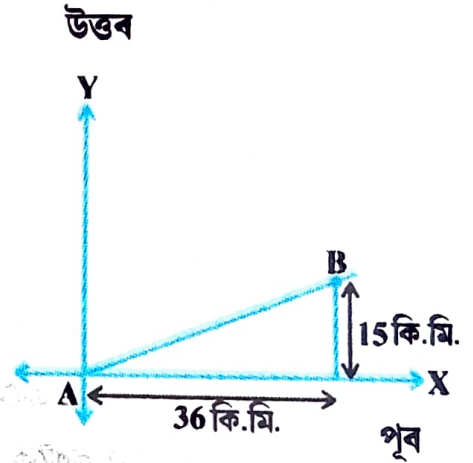
এতিয়া, ধৰা দুটা বিন্দু x-অক্ষৰ ওপৰত আছে। ইহঁত দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিবানে? চিত্ৰ 7.2ত দিয়াৰ দৰে ধৰা হ'ল A(4, 0) আৰু B(6, 0) দুটা বিন্দু। A আৰু B বিন্দু দুটা x-অক্ষৰ ওপৰত আছে।

চিত্ৰৰ পৰা তোমালোকে দেখিছা যে OA = 4 একক আৰু OB = 6 একক।

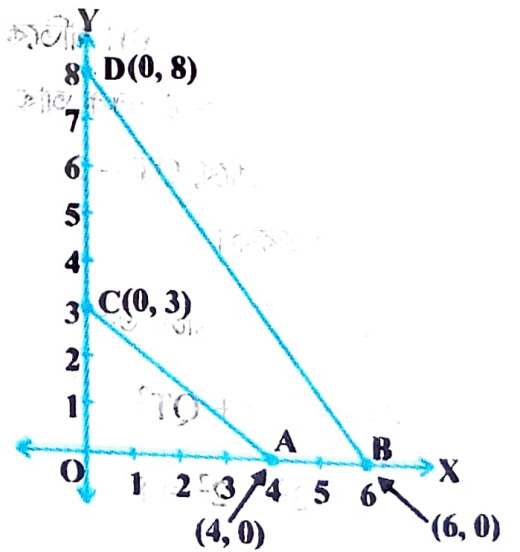
গতিকে A ৰ পৰা B ৰ দূৰত্ব অৰ্থাৎ,

$AB = OB - OA = 6 - 4 = 2$ একক। সেয়ে, যদি দুটা বিন্দু x-অক্ষৰ ওপৰত অৱস্থিত তেনেহ'লে আমি সহজতে সিহঁতৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিম।

এতিয়া ধৰা হ'ল, দুটা বিন্দু y-অক্ষৰ ওপৰত অৱস্থিত বুলি লোনা হ'ল। তোমালোকে ইহঁতৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিবানে? যদি C(0, 3) আৰু D(0, 8) বিন্দু দুটা y-অক্ষৰ ওপৰত আছে, একেদৰেই আমি পাবোঁ যে $CD = 8 - 3 = 5$ একক (চিত্ৰ 7.2 চোৱা)



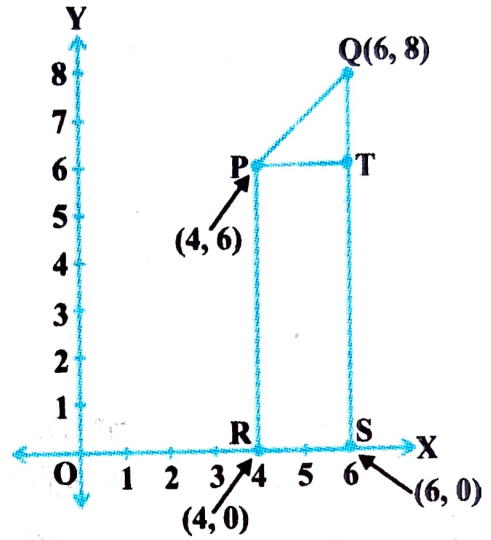
চিত্ৰ 7.1



চিত্ৰ 7.2

ইয়াৰ পিছত, তোমালোকে C ৰ পৰা A ৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিবানে (চিত্ৰ 7.2 মতে)? যিহেতু $OA = 4$ একক আৰু $OC = 3$ একক, গতিকে C ৰ পৰা A ৰ দূৰত্ব, অৰ্থাৎ $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ একক। এইদৰেই তোমালোকে D ৰ পৰা B ৰ দূৰত্ব $= BD = 10$ একক উলিয়াব পাৰিবা।

এতিয়া আমি যদি দুটা বিন্দু স্থানাংক অক্ষৰ ওপৰত নথকাকৈ লওঁ, তেন্তে সিহঁতৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিমনে? নিশ্চয় পাৰিম। এই ক্ষেত্ৰত আমি পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ সহায় ল'ম। তলৰ এটা উদাহৰণলৈ মন কৰা। চিত্ৰ 7.3 ত দেখুওৱাৰ দৰে $P(4, 6)$ আৰু $Q(6, 8)$ বিন্দু দুটা প্ৰথম চোকত আছে। ইহঁত দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াবলৈ আমি কিদৰে পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰিম। এতিয়া P আৰু Q ৰ পৰা x-অক্ষৰ ওপৰত ক্ৰমে PR আৰু QS ৰ ওপৰত T বিন্দুত ছেদ কৰাকৈ এডাল লম্ব টনা হ'ল। তেতিয়াহঁলে R আৰু S ৰ স্থানাংক হ'ব ক্ৰমে $(4, 0)$ আৰু $(6, 0)$ । গতিকে $RS = 2$ একক। আকৌ $QS = 8$ একক আৰু $TS = PR = 6$ একক। সেইবাবে, $QT = 2$ একক আৰু $PT = RS = 2$ একক।



চিত্ৰ 7.3

এতিয়া পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত আমি পাওঁ,

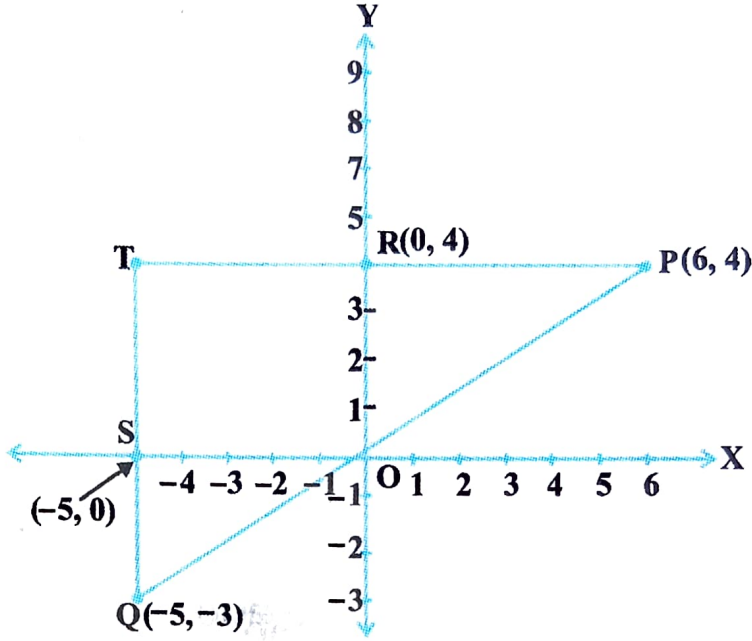
$$\begin{aligned} PQ^2 &= PT^2 + QT^2 \\ &= 2^2 + 2^2 = 8 \end{aligned}$$

গতিকে, $PQ = 2\sqrt{2}$ একক।

দুটা বেলেগ চোকত থকা দুটা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব কেনেকৈ উলিয়াবা?

$P(6, 4)$ আৰু $Q(-5, -3)$ এই বিন্দু দুটা লোৱা (চিত্ৰ 7.4 চোৱা)। x-অক্ষৰ ওপৰত QS লম্ব টনা।

আকৌ P বিন্দুৰ পৰা QS ৰ (বৰ্দ্ধিত অংশত) ওপৰত PT লম্ব টনা আৰু এই লম্বই y-অক্ষক R বিন্দুত ছেদ কৰিছে।



চিত্র 7.4

এতিয়া $PT = 11$ একক আৰু $QT = 7$ একক (কিয়?)

PTQ সমকোণী ত্ৰিভুজত পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ

$$PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170} \text{ একক।}$$

এতিয়া আমি যিকোনো দুটা বিন্দু $P(x_1, y_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2)$ ৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰিম। x -অক্ষৰ ওপৰত PR আৰু QS লম্ব টনা হ'ল। P বিন্দুৰ পৰা QS ৰ ওপৰত T বিন্দুত এডাল লম্ব টনা হ'ল (চিত্র 7.5 চোৱা)।

এতিয়া, $OR = x_1$, $OS = x_2$.

গতিকে, $RS = x_2 - x_1 = PT$.

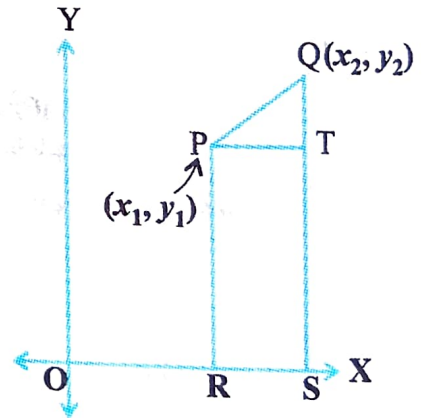
আকৌ $SQ = y_2$, $ST = PR = y_1$.

গতিকে, $QT = y_2 - y_1$.

এতিয়া ΔPTQ ত পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ,

$$\begin{aligned} PQ^2 &= PT^2 + QT^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

গতিকে, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



চিত্র 7.5

স্থানাংক জ্যামিতি

মনত ৰাখিবা যে যিহেতু দূৰত্ব সদায় অঋণাত্মক, গতিকে আমি ইয়াত ধনাত্মক বৰ্গমূলহে লৈছো। গতিকে $P(x_1, y_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2)$ ৰ মাজৰ দূৰত্ব $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, ইয়াক 'দূৰত্ব সূত্র' (**distance formula**) বোলে।

মন্তব্য :

- বিশেষত : মূলবিন্দু $O(0, 0)$ ৰ পৰা কোনো এটা বিন্দু $P(x, y)$ ৰ দূৰত্ব হ'ব $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$
- দূৰত্বৰ সূত্রটো আমি তলত দিয়া ধৰণেৰেও ল'ব পাৰো $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (কিয়?)

উদাহৰণ 1 : $(3, 2)$, $(-2, -3)$ আৰু $(2, 3)$ বিন্দু কেইটাই এটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰেনে? যদি কৰে, তেনেহ'লে কেনে ধৰণৰ ত্ৰিভুজ গঠন হ'ব তাৰ নাম লিখা।

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দুকেইটা $P(3, 2)$, $Q(-2, -3)$ আৰু $R(2, 3)$ ৰ পৰা দূৰত্বৰ সূত্র প্ৰয়োগ কৰি PQ , QR আৰু PR এই দূৰত্ব কেইটা উলিয়াই লওঁ। আমি পাওঁ যে

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (প্ৰায়)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (প্ৰায়)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (প্ৰায়)}$$

যিহেতু এই দূৰত্ববিলাকৰ যিকোনো দুটা দূৰত্বৰ যোগফল তৃতীয়টোতকৈ ডাঙৰ, গতিকে P , Q আৰু R বিন্দু তিনিটাই এটা ত্ৰিভুজ গঠন কৰে।

তদুপৰি, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$. গতিকে, পাইথাগোৰাচ উপপাদ্যৰ বিপৰীত উপপাদ্যমতে আমি পাওঁ যে $\angle P = 90^\circ$.

গতিকে, PQR এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ।

উদাহৰণ 2 : দেখুওৱা যে $(1, 7)$, $(4, 2)$, $(-1, -1)$ আৰু $(-4, 4)$ বিন্দুকেইটা এটা বৰ্গৰ শীৰ্ষ বিন্দু।

সমাধান : ধৰাহ'ল প্রদত্ত বিন্দুকেইটা $A(1, 7)$, $B(4, 2)$, $C(-1, -1)$ আৰু $D(-4, 4)$ । $ABCD$ এটা বৰ্গ বুলি দেখুওৱাৰ এটা পদ্ধতি হ'ল যে ইয়াৰ আটাইবোৰ বাহুৰ দীঘ সমান আৰু কর্ণ দুডালৰ দীঘ সমান বুলি দেখুৱাব লাগে।

এতিয়া,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

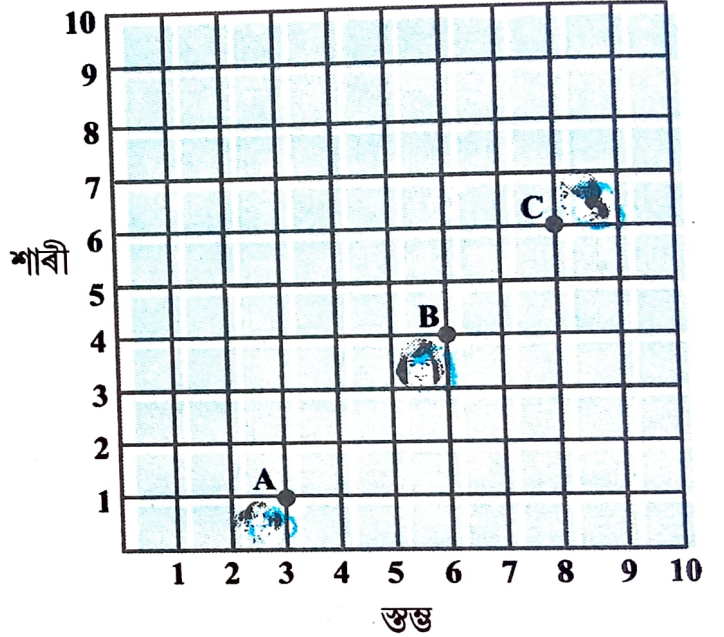
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

যিহেতু, $AB = BC = CD = DA$ আৰু $AC = BD$, গতিকে ABCD চতুৰ্ভুজটোৰ আটাইবোৰ বাহু সমান আৰু কর্ণ AC আৰু BD সমান। গতিকে ABCD এটা বৰ্গ।

বিকল্প সমাধান : আমি চাৰিটা বাহু আৰু এটা কর্ণ, ধৰা AC ইতিমধ্যে নিৰ্ণয় কৰিছো। ইয়াত $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$. গতিকে পাইথাগোৰাচৰ বিপৰীত উপপাদ্য মতে, $\angle D = 90^\circ$ হ'লে ই এটা বৰ্গ হয়। গতিকে, ABCD এটা বৰ্গ।

উদাহৰণ 3 : চিত্ৰ 7.6ত এটা শ্ৰেণীকোঠাৰ ডেস্কৰ সাজোনটো দেখুওৱা হৈছে। অসীম, ভাৰতী আৰু কমলা ক্ৰমে A(3, 1), B(6, 4) আৰু C(8, 6) স্থানত বাহিছে। তোমালোকে ভাবানে যে তেওঁলোক



চিত্ৰ 7.6

এডাল সৰলৰেখাত বহিছে? তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে যুক্তি দিয়া।

সমাধান : দূৰত্ব সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ,

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

যিহেতু, $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, গতিকে আমি ক'ব পাৰো যে A, B আৰু C বিন্দুকেইটা একৰেখীয়। গতিকে, তেওঁলোক এডাল সৰলৰেখাত বহিছে।

উদাহৰণ 4 : x আৰু y ৰ মাজৰ এটা সম্পৰ্ক নিৰ্ণয় কৰা যদিহে (x, y) বিন্দুটো $(7, 1)$ আৰু $(3, 5)$ বিন্দু দুটাৰপৰা সমদূৰৱৰ্তী।

সমাধান : ধৰা হ'ল $P(x, y)$ বিন্দুটো $A(7, 1)$ আৰু $B(3, 5)$ ৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী।

আমাক দিয়া আছে যে, $AP = BP$. গতিকে, $AP^2 = BP^2$

অৰ্থাৎ, $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$

অৰ্থাৎ, $x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

অৰ্থাৎ, $x - y = 2$, ইয়েই উলিয়াব লগা সম্পৰ্ক।

মন্তব্য : মন কৰা যে $x - y = 2$ ৰ লেখটো এডাল সৰল ৰেখা হ'ব। আগৰ অধ্যয়নৰপৰা তোমালোকে জানা যে A আৰু B ৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী বিন্দুটো AB ৰেখাৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকৰ ওপৰত থাকে। গতিকে, $x - y = 2$ ৰ লেখটো AB ৰ লম্ব সমদ্বিখণ্ডকডাল (চিত্ৰ 7.7 চোৱা)।

উদাহৰণ 5 : y -অক্ষৰ ওপৰত থকা এটা বিন্দু উলিওৱা যিটো $A(6, 5)$ আৰু $B(-4, 3)$ ৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী।

সমাধান : আমি জানো যে y -অক্ষৰ ওপৰত থকা এটা বিন্দুৰ স্থানাংকৰ আৰ্হি হ'ল $(0, y)$ । গতিকে ধৰা হ'ল $P(0, y)$ বিন্দুটো A আৰু B ৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী। তেতিয়া হ'লে,

$$(6 - 0)^2 + (5 - y)^2 = (-4 - 0)^2 + (3 - y)^2$$

$$\text{অৰ্থাৎ, } 36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

$$\text{অৰ্থাৎ, } 4y = 36, \quad \text{অৰ্থাৎ, } y = 9$$

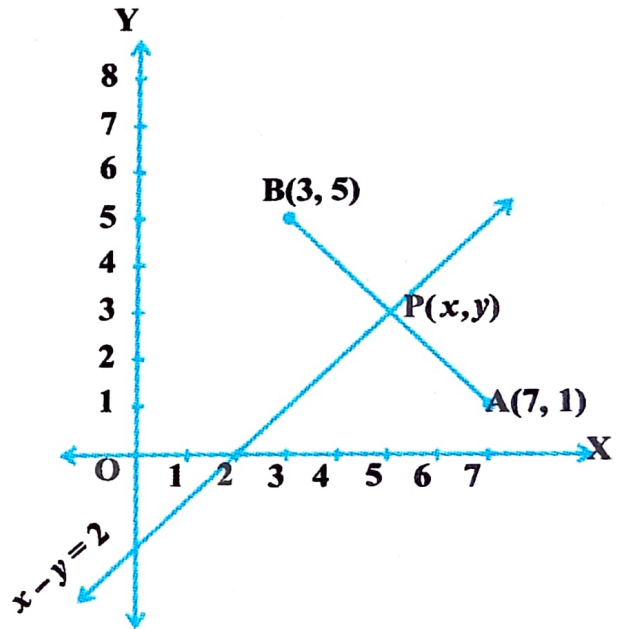
গতিকে উলিয়াব লগা বিন্দুটো হ'ল $(0, 9)$.

এতিয়া আমাৰ সমাধানৰ সত্যাপন কৰি চাওঁ

$$AP = \sqrt{(6 - 0)^2 + (5 - 9)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$BP = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (3 - 9)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

টোকা : ওপৰৰ মন্তব্যৰ সহায়ত আমি দেখিছো যে y -অক্ষ আৰু AB ক লম্ব সমদ্বিখণ্ডকৰ ছেদবিন্দুটো হ'ল $(0, 9)$ ।

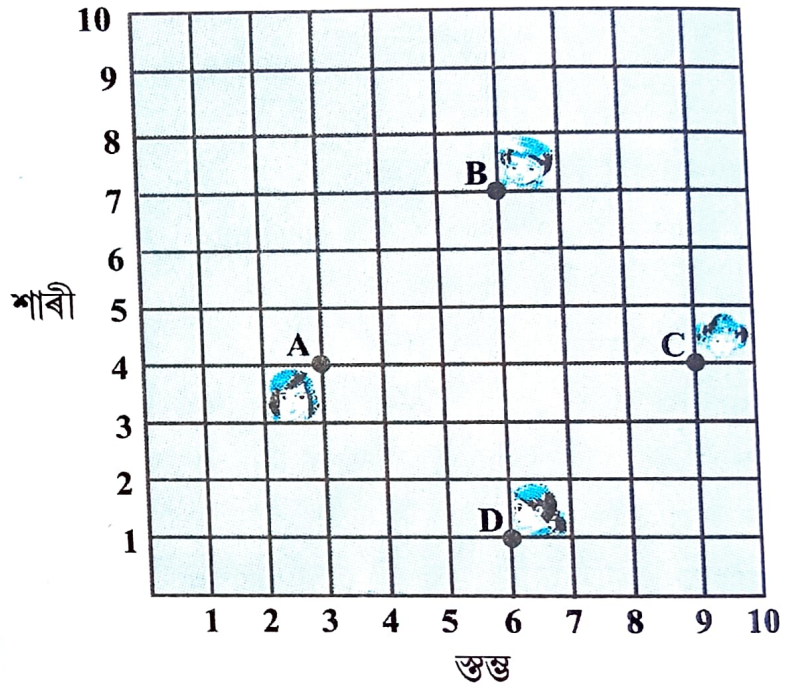


চিত্ৰ 7.7

অনুশীলনী 7.1

- তলৰ প্ৰতিযোৰ বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা
(i) (2, 3), (4, 1) (ii) (-5, 7), (-1, 3) (iii) (a, b), (-a, -b)
- (0, 0) আৰু (36, 15) ৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিওৱা। তুমি এতিয়া ওপৰৰ 7.2 অনুচ্ছেদত আলোচনা কৰা A আৰু B নগৰ দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিবানে?
- (1, 5), (2, 3) আৰু (-2, -11) বিন্দুকেইটা একৰেখীয় হয়নে নিৰ্ণয় কৰা।
- (5, -2), (6, 4) আৰু (7, -2) বিন্দুকেইটা এটা সমদ্বিবাছ ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

- এটা শ্ৰেণী কোঠাত 4 জন বন্ধু চিত্ৰ 7.8ত দিয়াৰ দৰে A, B, C আৰু D স্থানত বহিছে। চম্পা আৰু চামেলি শ্ৰেণী কোঠালৈ সোমাই গ'ল আৰু অলপ সময় নিৰীক্ষণ কৰাৰ পাছত চম্পাই চামেলিক ক'লে, "ABCD এটা বৰ্গ বুলি তুমি নাভাবানে?" চামেলিয়ে বৰ্গ নহ'ব বুলি জনালে। দূৰত্বৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি তেওঁলোক দুজনীৰ কোন শুদ্ধ নিৰূপণ কৰা।

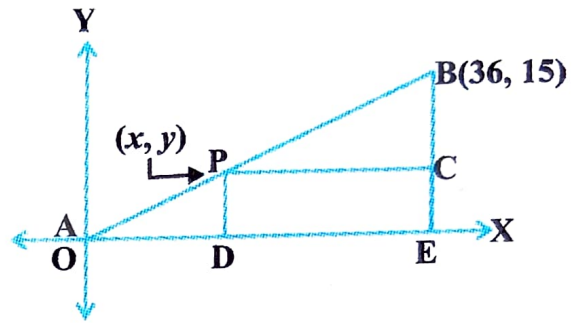


চিত্ৰ 7.8

- তলৰ বিন্দুবিলাকে যদি চতুৰ্ভুজ গঠন কৰে তেনেহ'লে সেই চতুৰ্ভুজৰ স্বৰূপ নিৰ্ণয় কৰা আৰু তোমাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে কাৰণ দাঙি ধৰা
(i) (-1, -2), (1, 0), (-1, 2), (-3, 0)
(ii) (-3, 5), (3, 1), (0, 3), (-1, -4)
(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)
- (2, -5) আৰু (-2, 9) বিন্দু দুটাৰপৰা সমদূৰত্বত x অক্ষৰ ওপৰত থকা বিন্দুটো নিৰ্ণয় কৰা।
- y ৰ সেই মান নিৰ্ণয় কৰা যাৰ বাবে P(2, -3) আৰু Q(10, y) বিন্দু দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব 10 একক হয়।
- যদি Q(0, 1) বিন্দুটো P(5, -3) আৰু R(x, 6) ৰ পৰা সমদূৰত্বতী তেন্তে x অক্ষৰ মান উলিওৱা। তদুপৰি QR আৰু PR দূৰত্বকেইটা উলিওৱা।
- x আৰু y ৰ মাজৰ সম্পৰ্ক উলিওৱা যাতে (x, y) বিন্দুটো (3, 6) আৰু (-3, 4) বিন্দু দুটাৰপৰা সমদূৰত্বতী হয়।

7.3. বিভাজন সূত্র (Section Formula)

অনুচ্ছেদ 7.2-র অর্থস্বারা মনে পেলো। ধরা হ'ল এটা টেলিফোন কোম্পানীয়ে A আৰু B ঠাই দুখনৰ মাজৰ P ঠাই টুকুৰাত এটা বিলে টাৱাৰ (relay tower) এনেদৰে স্থাপন কৰিব বিচাৰিলে যাতে P আৰু B-ৰ মাজৰ দূৰত্ব P আৰু A-ৰ মাজৰ দূৰত্বৰ দুগুণ হয়। যদি P বিন্দুটো AB-ৰ ওপৰত থাকে তেনেহ'লে ই AB-ক 1 : 2 অনুপাতত ভাগ কৰিব (চিত্ৰ 7.9 চোৱা)। যদি A বিন্দুটোক মূলবিন্দু O বুলি লোৱা হয় আৰু দুয়োডাল অক্ষতে 1 কি.মি.ক এক একক বুলি লোৱা হয় তেন্তে B বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ব (36, 15)। এতিয়া টাৱাৰটোৰ অৱস্থান জানিবলৈ হ'লে আমি P-ৰ স্থানাংক জানিবই লাগিব। এতিয়া P-ৰ স্থানাংক কেনেকৈ উলিয়াওঁ?



চিত্ৰ 7.9

ধৰা হ'ল, P বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y) । P আৰু B বিন্দুৰপৰা x -অক্ষৰ ওপৰত ক্ৰমে D আৰু E বিন্দুত লম্ব টনা হ'ল। BE-ৰ ওপৰত PC লম্ব টনা হ'ল। এতিয়া ত্ৰিভুজৰ কোণ-কোণ সাদৃশ্য চৰ্তৰপৰা (ষষ্ঠ অধ্যায়ত আলোচনা কৰা হৈছে) ΔPOD আৰু ΔBPC সদৃশ।

$$\text{গতিকে, } \frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}, \text{ আৰু } \frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$$

$$\text{সেয়ে, } \frac{x}{36-x} = \frac{1}{2} \text{ আৰু } \frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$$

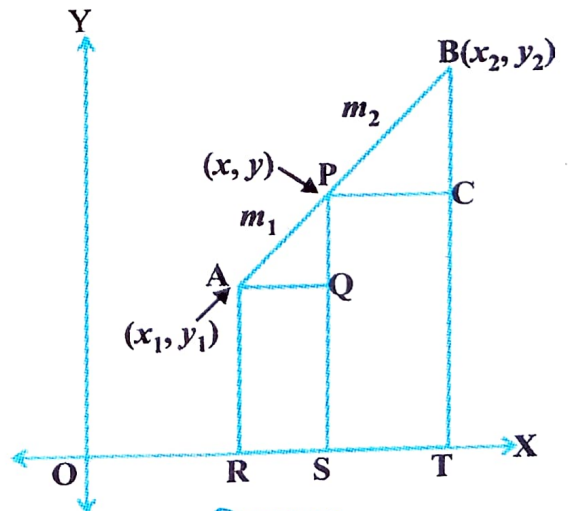
এই সমীকৰণ দুটাৰপৰা পাওঁ $x=12$ আৰু $y=5$

তোমালোকে পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা যে $P(12, 5)$ বিন্দুটোৰ বাবে $OP : PB = 1 : 2$ ।

এতিয়া এই উদাহৰণটোৰপৰা তোমালোকে যিখিনি কথা শিকিলা তাৰ সহায়ত আমি এটা সাধাৰণ সূত্র (general formula) উলিয়াওঁ।

ধৰা হ'ল $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ দুটা বিন্দু। আকৌ ধৰা হ'ল $P(x, y)$ বিন্দুটোৱে AB-ক $m_1 : m_2$, অনুপাতত অন্তৰ্ভুক্ত কৰে, অৰ্থাৎ,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2} \text{ (চিত্ৰ 7.10 চোৱা)।}$$



চিত্ৰ 7.10

এতিয়া x অক্ষৰ ওপৰত AR, PS আৰু BT লম্ব টনা হ'ল। AQ আৰু PC ক x -অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ টনা হ'ল। এতিয়া কোণ-কোণ সাদৃশ্য চৰ্তমতে, $\Delta PAQ \sim \Delta BPC$

$$\text{গতিকে, } \frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \quad \dots (1)$$

এতিয়া,

$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$

$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$

$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$

$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

এই মান বিলাক (1)ত বহুৱালে আমি পাওঁ,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$\text{গতিকে, } \frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \text{ ৰ পৰা } x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

$$\text{সেইদৰে, } \frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \text{ ৰ পৰা } y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

সেয়ে, $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাখণ্ডক $m_1 : m_2$ অনুপাতত অন্তৰ্ভুক্ত কৰা $P(x, y)$ বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ল

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right) \quad \dots (2)$$

এই সূত্রটোকেই বিভাজন সূত্র (section formula) বোলে। এই সূত্রটো আমি A, P আৰু B ৰ পৰা y -অক্ষৰ ওপৰত লম্ব টানি আগৰ দৰে একে পদ্ধতি অবলম্বন কৰিও উলিয়াব পাৰোঁ।

যদি P বিন্দুৱে AB ক বিভক্ত কৰা অনুপাত $k : 1$ হয়, তেতিয়া P বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ব

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1} \right).$$

বিশেষ অৱস্থা (Special Case) : এডাল ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দুটোৱে সেই ৰেখাখণ্ডটোকে 1:1 অনুপাতত বিভক্ত কৰে। গতিকে $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দু P ৰ স্থানাংক হ'ব—

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1} \right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

এতিয়া x অক্ষৰ ওপৰত AR, PS আৰু BT লম্ব টনা হ'ল। AQ আৰু PC ক x -অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ টনা হ'ল। এতিয়া কোণ-কোণ সাদৃশ্য চৰ্তমতে, $\Delta PAQ \sim \Delta BPC$

$$\text{গতিকে, } \frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \quad \dots (1)$$

এতিয়া,

$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$

$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$

$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$

$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

এই মান বিলাক (1)ত বহুৱালে আমি পাওঁ,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$\text{গতিকে, } \frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \text{ ৰ পৰা } x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

$$\text{সেইদৰে, } \frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} \text{ ৰ পৰা } y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

সেয়ে, $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাখণ্ডক $m_1 : m_2$ অনুপাতত অন্তৰ্ভুক্ত কৰা $P(x, y)$ বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ল

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right) \quad \dots (2)$$

এই সূত্রটোকেই বিভাজন সূত্র (section formula) বোলে। এই সূত্রটো আমি A, P আৰু B ৰ পৰা y -অক্ষৰ ওপৰত লম্ব টানি আগৰ দৰে একে পদ্ধতি অবলম্বন কৰিও উলিয়াব পাৰোঁ।

যদি P বিন্দুৱে AB ক বিভক্ত কৰা অনুপাত $k : 1$ হয়, তেতিয়া P বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ব

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1} \right)$$

বিশেষ অৱস্থা (Special Case) : এডাল ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দুটোৱে সেই ৰেখাখণ্ডটোকে 1:1 অনুপাতত বিভক্ত কৰে। গতিকে $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দু P ৰ স্থানাংক হ'ব—

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1} \right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

এতিয়া এই বিভাজন সূত্রৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি আমি কিছুমান উদাহৰণ সমাধা কৰিম।

উদাহৰণ 6 : $(4, -3)$ আৰু $(8, 5)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক $3 : 1$ অনুপাতত অন্তৰ্ভিত্ত কৰা বিন্দুটোৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : ধৰাহ'ল $P(x, y)$ বিন্দুটোৱেই উলিয়াবলগীয়া বিন্দু। বিভাজন সূত্র প্ৰয়োগ কৰি আমি

$$\text{পাওঁ, } x = \frac{3(8) + 1(4)}{3 + 1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3 + 1} = 3$$

\therefore নিৰ্ণয় বিন্দুটো $(7, 3)$

উদাহৰণ 7 : $(-4, 6)$ বিন্দুটোৱে $A(-6, 10)$ আৰু $B(3, -8)$ বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাখণ্ডক কি অনুপাতত বিভক্ত কৰে?

সমাধান : ধৰাহ'ল $(-4, 6)$ বিন্দুটোৱে AB ক $m_1 : m_2$ অনুপাতত অন্তৰ্ভিত্ত কৰে। বিভাজন সূত্র ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ,

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} \right) \quad \dots (1)$$

মনত পেলোৱা যে যদি $(x, y) = (a, b)$ তেন্তে, $x = a$ আৰু $y = b$.

$$\text{সেয়ে, } -4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{আৰু} \quad 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{এতিয়া } -4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{ৰ পৰা } -4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

$$\text{অৰ্থাৎ, } 7m_1 = 2m_2$$

$$\text{অৰ্থাৎ, } m_1 : m_2 = 2 : 7$$

তোমালোকে এইটো সত্যাপন কৰি চোৱা উচিত যে এই অনুপাতে y -স্থানাংকও সিদ্ধ কৰে।

$$\text{এতিয়া, } \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8 \frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

গতিকে, $(-4, 6)$ বিন্দুটোৱে $A(-6, 10)$ আৰু $B(3, -8)$ বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাখণ্ডক $2 : 7$ অনুপাতত বিভক্ত কৰে।

বিকল্প সমাধান (Alternatively) : $m_1 : m_2$ অনুপাতটোক $\frac{m_1}{m_2} : 1$, বা $k : 1$ বুলিও ল'ব

পাৰি। ধৰা হ'ল $(-4, 6)$ য়ে AB ক $k : 1$ অনুপাতত অন্তৰ্ভুক্ত কৰিছে। এতিয়া বিভাজন সূত্রৰ সহায়ত পাওঁ যে—

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1} \right) \dots(2)$$

$$\text{গতিকে, } -4 = \frac{3k - 6}{k + 1}$$

$$\text{অৰ্থাৎ, } -4k - 4 = 3k - 6$$

$$\text{বা, } 7k = 2$$

$$\text{অৰ্থাৎ, } k : 1 = 2 : 7$$

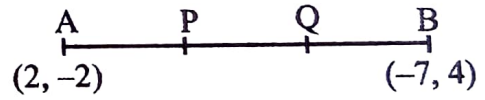
তোমালোকে y -স্থানাংকও লৈ পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা।

গতিকে, $(-4, 6)$ বিন্দুৱে $A(-6, 10)$ আৰু $B(3, -8)$ বিন্দুসংযোগী ৰেখাখণ্ডক $2 : 7$ অনুপাতত ভাগ কৰিছে।

টোকা : তোমালোকে যদি জানা যে A, P আৰু B বিন্দু তিনিটা একৰেখীয়, তেনেহ'লে PA আৰু PB ৰ দূৰত্ব উলিয়াই এই দূৰত্বৰ অনুপাত হিচাপ কৰিলেই আমাক লগা অনুপাত পাম।

উদাহৰণ ৪ : $A(2, -2)$ আৰু $B(-7, 4)$ বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাখণ্ডক সম ত্ৰিখণ্ডিত কৰা (অৰ্থাৎ তিনিটা সমান ভাগত ভাগ কৰা) বিন্দুকেইটাৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : ধৰা হ'ল AB ক সমানে ত্ৰিখণ্ডিত কৰা বিন্দুকেইটা P আৰু Q অৰ্থাৎ,



$AP = PQ = QB$ (চিত্ৰ 7.11 চোৱা)।

চিত্ৰ 7.11

গতিকে, P য়ে AB ক $1 : 2$ অনুপাতত অন্তৰ্ভুক্ত কৰিছে। গতিকে বিভাজন সূত্রৰপৰা, P ৰ স্থানাংক হ'ব

$$\left(\frac{1(-7) + 2(2)}{1 + 2}, \frac{1(4) + 2(-2)}{1 + 2} \right), \text{ অৰ্থাৎ, } (-1, 0)$$

আকৌ Q য়ে AB ক $2 : 1$ অনুপাতত অন্তৰ্ভুক্ত কৰিছে। গতিকে Q ৰ স্থানাংক হ'ব

$$\left(\frac{2(-7) + 1(2)}{2 + 1}, \frac{2(4) + 1(-2)}{2 + 1} \right), \text{ অৰ্থাৎ, } (-4, 2)$$

গতিকে, A আৰু B বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাক যি দুটা বিন্দুৱে সমানে ত্ৰিখণ্ডিত কৰিছে সেই বিন্দু দুটাৰ স্থানাংক হ'ল $(-1, 0)$ আৰু $(-4, 2)$ ।

টোকা : আমি Q বিন্দুটো PB ৰ মধ্যবিন্দু বুলি লৈয়ো ইয়াৰ স্থানাংক উলিয়াব পাৰোঁ। এই ক্ষেত্ৰত মধ্য বিন্দুৰ সূত্র ব্যৱহাৰ কৰিব লাগিব।

উদাহৰণ 9 : $(5, -6)$ আৰু $(-1, -4)$ বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা ৰেখাখণ্ডক y -অক্ষই কি অনুপাতত ছেদ কৰিছে উলিওৱা। তদুপৰি ছেদবিন্দুটোৰ স্থানাংকও নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : ধৰা হ'ল উলিয়াব লগা অনুপাত $k : 1$ । এতিয়া বিভাজন সূত্ৰৰ পৰা AB ক $k : 1$

অনুপাতত ভাগ কৰা বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ব $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$ ।

এই বিন্দুটো y -অক্ষত আছে। আমি জানো যে y -অক্ষত থকা এটা বিন্দুৰ ভূজ 0।

$$\text{গতিকে, } \frac{-k+5}{k+1} = 0$$

$$\text{সেয়ে, } k = 5$$

গতিকে উলিয়াব লগা অনুপাত $5 : 1$ । এই k ৰ মান বহুৱাই আমি পোৱা ছেদবিন্দুৰ স্থানাংক

$$\text{হ'ল } \left(0, \frac{-13}{3}\right)।$$

উদাহৰণ 10 : যদি $A(6, 1)$, $B(8, 2)$, $C(9, 4)$ আৰু $D(p, 3)$ বিন্দুকেইটা এইটো ক্ৰমতে এটা সামান্তৰিকৰ শীৰ্ষ বিন্দু হয় তেনেহ'লে p ৰ মান উলিওৱা।

সমাধান : আমি জানো যে সামান্তৰিকৰ কৰ্ণ দুডাল পৰস্পৰ সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

গতিকে, AC ৰ মধ্যবিন্দুৰ স্থানাংক = BD ৰ মধ্যবিন্দুৰ স্থানাংক

$$\text{অৰ্থাৎ, } \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

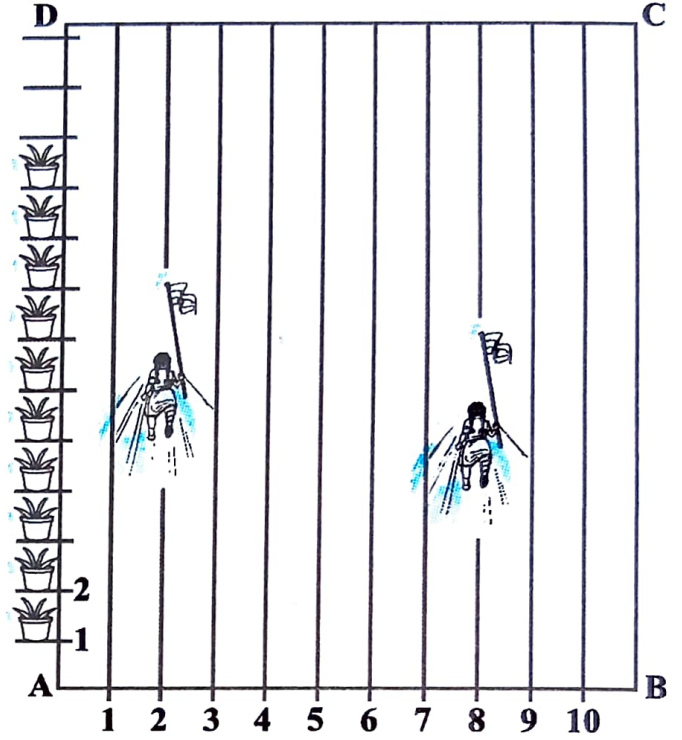
$$\text{বা, } \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{গতিকে, } \frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}, \quad \text{অৰ্থাৎ, } p = 7$$

অনুশীলনী 7.2

- $(-1, 7)$ আৰু $(4, -3)$ ৰ সংযোগী ৰেখাখণ্ডক $2 : 3$ অনুপাতত ভাগ কৰা বিন্দুটোৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।
- $(4, -1)$ আৰু $(-2, -3)$ ৰ সংযোগী ৰেখাখণ্ডক সমদ্বিখণ্ডিত কৰা বিন্দু কেইটাৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

3. তোমালোকৰ স্কুলৰ আয়তাকাৰ খেল পথাৰ ABCD ত খেল দিৱস উপলক্ষে খেল-ধেমালি অনুষ্ঠিত কৰিবলৈ চক্ পাউদাৰবেৰে 1 মিটাৰৰ ব্যৱধানত কিছুমান লাইন টনা হ'ল। 100 টা ফুলৰ টাব এটাৰ পৰা আনটোৰ ব্যৱধান 1 মিটাৰকৈ চিত্ৰ 7.12ত দেখুওৱাৰ দৰে ADৰ দিশত ৰখা হ'ল। নীহাৰিকাই দ্বিতীয় লাইন ডালেৰে ADৰ $\frac{1}{4}$ অংশ দৌৰি গৈ তাতে এখন সেউজীয়া পতাকা পুতি থলে। পদ্বই অষ্টম লাইন ডালেৰে ADৰ $\frac{1}{5}$ অংশ দৌৰি গৈ



চিত্ৰ 7.12

তাতে এখন ৰঙা পতাকা পুতি থ'লে।

এই পতাকা দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব কিমান? যদি ৰশ্মিয়ে আগৰ পতাকা দুখন সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ ঠিক মধ্যস্থানত এখন নীলা পতাকা পুতিব লগা হয়, তেন্তে তেওঁ কোন স্থানত এই পতাকাখন পুতিব?

4. $(-1, 6)$ বিন্দুটোৱে $(-3, 10)$ আৰু $(6, -8)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাক কি অনুপাতত ভাগ কৰিব?
5. $A(1, -5)$ আৰু $B(-4, 5)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক x -অক্ষই কি অনুপাতত ছেদ কৰিব নিৰ্ণয় কৰা। লগতে ছেদ বিন্দুটোৰ স্থানাংকও উলিওৱা।
6. যদি $(1, 2)$, $(4, y)$, $(x, 6)$ আৰু $(3, 5)$ বিন্দুকেইটা এইটো ক্ৰমতে এটা সামান্তৰিকৰ শীৰ্ষবিন্দু হয় তেন্তে x আৰু y উলিওৱা।
7. এটা বৃত্তৰ এডাল ব্যাস AB ৰ A বিন্দুটোৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা যেতিয়া বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ $(2, -3)$ আৰু B বিন্দুৰ স্থানাংক $(1, 4)$ ।
8. যদি A আৰু B বিন্দুৰ স্থানাংক ক্ৰমে $(-2, -2)$ আৰু $(2, -4)$, তেন্তে P বিন্দুৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা যাতে $AP = \frac{3}{7}AB$ আৰু P বিন্দুটো AB ৰেখাখণ্ডৰ ওপৰত থাকে।
9. $A(-2, 2)$ আৰু $B(2, 8)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক চাৰিটা সমান ভাগত ভাগ কৰা বিন্দু কেইটাৰ স্থানাংক উলিওৱা।

10. এটা বস্কাচৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা যদিহে তাৰ শীৰ্ষ বিন্দু বিলাকৰ স্থানাংক ক্ৰম অনুসৰি (3, 0), (4, 5), (-1, 4) আৰু (-2, -1)।

[ইংগিত : বস্কাচৰ কালি = $\frac{1}{2}$ (কৰ্ণ দুডালৰ পূৰণফল)]

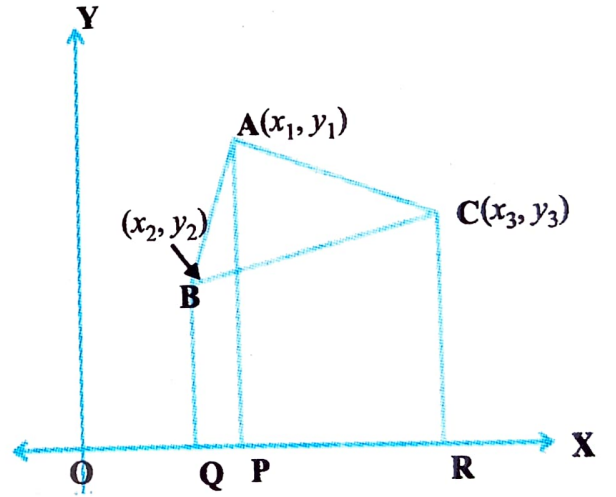
7.4. ত্ৰিভুজৰ কালি (Area of a Triangle)

তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত ত্ৰিভুজৰ ভূমি আৰু উন্নতি দিয়া থাকিলে তাৰ কালি কেনেকৈ উলিয়াব লাগে এই বিষয়ে শিকি আহিছ। তেতিয়া তোমালোকে ব্যৱহাৰ কৰা সূত্ৰটো হ'ল

$$\text{ত্ৰিভুজৰ কালি} = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উন্নতি}$$

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে ত্ৰিভুজৰ কালি উলিয়াবলৈ হিৰণৰ সূত্ৰৰ ব্যৱহাৰৰ বিষয়েও পঢ়ি আহিছ। এতিয়া, তোমালোকক যদি এটা ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু বিলাকৰ স্থানাংক দিয়া হয় তোমালোকে ত্ৰিভুজটোৰ কালি উলিয়াব পাৰিবানে? পাৰিবা, তোমালোকে দূৰত্বৰ সূত্ৰৰ সহায়ত ত্ৰিভুজৰ বাহু তিনিটাৰ দীঘ উলিয়াই লৈ হিৰণৰ সূত্ৰত প্ৰয়োগ কৰিব পাৰিবা। কিন্তু এইটো বৰ আমনিদায়ক হ'ব, বিশেষকৈ যেতিয়া বাহু বিলাকৰ দীঘ অপৰিমেয় সংখ্যা হয়। বাৰু এতিয়া আমি কিবা সহজ নিয়ম আছে নেকি চাওঁ।

ধৰা হ'ল ABC যিকোনো এটা ত্ৰিভুজ যাৰ শীৰ্ষ বিন্দু কেইটা হ'ল $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ আৰু $C(x_3, y_3)$ । A, B আৰু C বিন্দুৰ পৰা x-অক্ষৰ ওপৰত ক্ৰমে AP, BQ আৰু CR লম্ব টনা হ'ল। স্পষ্টভাৱে, ABQP, APRC আৰু BQRC তিনিটা ট্ৰেপিজিয়াম (চিত্ৰ 7.13 চোৱা)।



চিত্ৰ 7.13

এতিয়া চিত্ৰ 7.13 ৰ পৰা এইটো স্পষ্ট যে ΔABC ৰ কালি = ট্ৰেপিজিয়াম ABQP ৰ কালি + ট্ৰেপিজিয়াম APRC ৰ কালি - ট্ৰেপিজিয়াম BQRC ৰ কালি।

তোমালোকে এইটোৰো জানা যে—

এটা ট্ৰেপিজিয়ামৰ কালি = $\frac{1}{2}$ (সমান্তৰাল বাহু দুটাৰ যোগফল) \times (সিহঁতৰ মাজৰ দূৰত্ব)

গতিকে,

$$\begin{aligned}\Delta ABC \text{ ৰ কালি} &= \frac{1}{2}(\text{BQ} + \text{AP})\text{QP} + \frac{1}{2}(\text{AP} + \text{CR})\text{PR} - \frac{1}{2}(\text{BQ} + \text{CR})\text{QR} \\ &= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \\ &= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]\end{aligned}$$

গতিকে, ΔABC ৰ কালি তলৰ ৰাশিটোৰ সাংখ্যিক মান

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

এতিয়া আমি কেইটামান উদাহৰণ ল'ম যি কেইটাত এই সূত্রটো ব্যৱহাৰ হয়।

উদাহৰণ 11 : এটা ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষবিন্দুকেইটা $(1, -1)$, $(-4, 6)$ আৰু $(-3, -5)$; ত্ৰিভুজটোৰ কালি উলিওৱা।

সমাধান : ধৰো ত্ৰিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দুকেইটা $A(1, -1)$, $B(-4, 6)$ আৰু $C(-3, -5)$ । ওপৰৰ সূত্রৰ সহায়ত পাওঁ যে, ইয়াৰ কালি

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}[1(6 + 5) + (-4)(-5 + 1) + (-3)(-1 - 6)] \\ &= \frac{1}{2}(11 + 16 + 21) = 24\end{aligned}$$

গতিকে, ত্ৰিভুজটোৰ কালি 24 বৰ্গ একক।

উদাহৰণ 12 : $A(5, 2)$, $B(4, 7)$ আৰু $C(7, -4)$ বিন্দুকেইটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : $A(5, 2)$, $B(4, 7)$ আৰু $C(7, -4)$ বিন্দুকেইটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ কালি

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}[5(7 + 4) + 4(-4 - 2) + 7(2 - 7)] \\ &= \frac{1}{2}(55 - 24 - 35) \\ &= \frac{-4}{2} = -2\end{aligned}$$

যিহেতু ত্ৰিভুজৰ কালি এটা মাপ গতিকে ই ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে। গতিকে, আমি -2 ৰ

সাংখ্যিক মান 2 হে গ্রহণ কৰিম।

গতিকে, ত্ৰিভুজটোৰ কালি = 2 বৰ্গ একক।

উদাহৰণ 13 : P(-1.5, 3), Q(6, -2) আৰু R(-3, 4) বিন্দুকেইটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দুকেইটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ কালি

$$= \frac{1}{2}[-1.5(-2-4) + 6(4-3) + (-3)(3+2)]$$

$$= \frac{1}{2}(9 + 6 - 15) = 0$$

আমি এনে এটা ত্ৰিভুজ পাব পাৰো নেকি যাৰ কালি 0 বৰ্গ একক? ইয়াৰ অৰ্থ কি?

যদি এটা ত্ৰিভুজৰ কালি 0 বৰ্গ একক, তেন্তে তাৰ শীৰ্ষবিন্দুকেইটা একৰেখীয়।

উদাহৰণ 14 : যদি A(2, 3), B(4, k) আৰু C(6, -3) বিন্দুকেইটা একৰেখীয় তেন্তে k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : যিহেতু প্রদত্ত বিন্দুকেইটা একৰেখীয়, গতিকে এই বিন্দুকেইটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ কালি 0 হ'ব লাগিব। অৰ্থাৎ

$$\frac{1}{2}[2(k+3) + 4(-3-3) + 6(3-k)] = 0$$

$$\text{অৰ্থাৎ, } \frac{1}{2}(-4k) = 0$$

গতিকে, $k = 0$

আমি এতিয়া আমাৰ উত্তৰটো সত্যাপন কৰি চাওঁ

$$\Delta ABC \text{ ৰ কালি} = \frac{1}{2}[2(0+3) + 4(-3-3) + 6(3-0)] = 0$$

উদাহৰণ 15 : যদি A(-5, 7), B(-4, -5), C(-1, -6) আৰু D(4, 5) বিন্দুকেইটা এটা চতুৰ্ভুজৰ শীৰ্ষবিন্দু, তেন্তে ABCD চতুৰ্ভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান : যদি B আৰু D বিন্দু দুটা সংযোগ কৰা হয় তেনেহ'লে আমি ABD আৰু BCD দুটা ত্ৰিভুজ পাম।

$$\text{এতিয়া, } \Delta ABD \text{ ৰ কালি} = \frac{1}{2}[-5(-5-5) + (-4)(5-7) + 4(7+5)]$$

$$= \frac{1}{2}(50 + 8 + 48) = \frac{106}{2} = 53 \text{ বৰ্গ একক।}$$

$$\begin{aligned} \text{আকৌ } \Delta ABCD \text{ৰ কালি} &= \frac{1}{2}[-4(-6-5) - 1(5+5) + 4(-5+6)] \\ &= \frac{1}{2}(44-10+4) = 19 \text{ বৰ্গ একক।} \end{aligned}$$

সেয়ে ABCD চতুৰ্ভুজৰ কালি = 53 + 19 = 72 বৰ্গ একক।

টোকা : এটা বহুভুজৰ কালি উলিয়াবলৈ হ'লে ইয়াক কিছুমান ত্ৰিভুজাকাৰ ক্ষেত্ৰত, যিবোলাকৰ কোনো উম্মেহতীয়া কালি নাথাকে, বিভক্ত কৰি সেইবোৰৰ কালি উলিয়াই তাৰ যোগফল ল'ব লাগে।

অনুশীলনী 7.3

- ত্ৰিভুজৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা যাৰ শীৰ্ষবিন্দুবোলাক হ'ল
 - (2, 3), (-1, 0), (2, -4)
 - (-5, -1), (3, -5), (5, 2)
- তলৰ প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰত 'k' ৰ মান উলিওৱা যেতিয়া সেই বিন্দুবোলাক একৰেখীয়
 - (7, -2), (5, 1), (3, k)
 - (8, 1), (k, -4), (2, -5)
- (0, -1), (2, 1) আৰু (0, 3) শীৰ্ষবিন্দু কেইটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ বাহুবোলাকৰ মধ্যবিন্দুকেইটা সংযোগ কৰি গঠন কৰা ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা। এই ত্ৰিভুজটোৰ কালি আৰু প্ৰদত্ত ত্ৰিভুজটোৰ কালিৰ অনুপাত নিৰ্ণয় কৰা।
- সেই চতুৰ্ভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা যাৰ শীৰ্ষবিন্দুবোলাক ক্ৰম অনুসৰি (-4, -2), (-3, -5), (3, -2) আৰু (2, 3)।
- তোমালোকে নৱম শ্ৰেণীত (নৱম অধ্যায়, উদাহৰণ 3) পঢ়ি আহিছা যে ত্ৰিভুজৰ মধ্যমা এডালে ত্ৰিভুজটোক দুটা ত্ৰিভুজত ভাগ কৰে যাৰ কালি সমান। ΔABC ৰ ক্ষেত্ৰত ইয়াৰ সত্যাপন কৰা যদি ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দুকেইটা A(4, -6), B(3, -2) আৰু C(5, 2)।

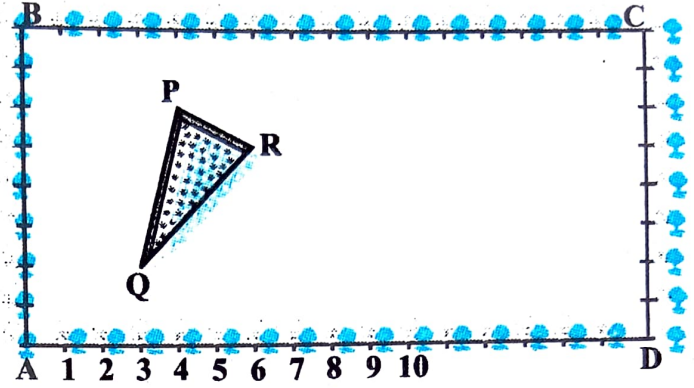
অনুশীলনী 7.4 (ঐচ্ছিক)*

- $2x + y - 4 = 0$ ৰেখাই A(2, -2) আৰু B(3, 7) বিন্দু সংযোগীৰেখাক ভাগ কৰা অনুপাতটো নিৰ্ণয় কৰা।
- x আৰু y ৰ মাজৰ এটা সম্পৰ্ক উলিওৱা, যদি (x, y), (1, 2) আৰু (7, 0) বিন্দুকেইটা একৰেখীয়।
- (6, -6), (3, -7) আৰু (3, 3) বিন্দুৰে যোৱা বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ উলিওৱা।

* এই অনুশীলনীটো পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

4. এটা বৰ্গৰ দুটা বিপৰীত শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল $(-1, 2)$ আৰু $(3, 2)$ । বৰ্গৰ আন দুটা শীৰ্ষবিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

5. কৃষ্ণনগৰৰ এখন মাধ্যমিক বিদ্যালয়ৰ দশম শ্ৰেণীৰ শিক্ষার্থীসকলক বাগিচা পাতিবৰ বাবে এটুকুৰা আয়তাকাৰ মাটি আবণ্টন দিয়া হ'ল। মাটি টুকুৰাৰ সীমাত 1 মিটাৰৰ আঁতৰে আঁতৰে কৃষ্ণচূড়াৰ পুলি ৰোপণ কৰা হ'ল। চিত্ৰ 7.14 ত দিয়াৰ দৰে মাটি টুকুৰাত ত্ৰিভুজাকাৰৰ অলপমান ঘাঁহনি আছে। শিক্ষার্থীবিলাকে



চিত্ৰ 7.14

মাটি টুকুৰাৰ অৱশিষ্ট অংশত ফুলৰ গুটি সিঁচিব লাগে।

(i) A বিন্দুক মূলবিন্দু ধৰি ত্ৰিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দু বিলাকৰ স্থানাংক উলিওৱা।

(ii) যদি C ক মূলবিন্দু বুলি ধৰা হয় তেনেহ'লে ΔPQR ৰ শীৰ্ষবিন্দুবিলাকৰ স্থানাংক কি হ'ব? এই পৰিস্থিতি কেইটাত ত্ৰিভুজ দুটাৰ কালি উলিওৱা।

ইয়াৰ পৰা তোমালোকে কি লক্ষ্য কৰিলা?

6. ΔABC ৰ শীৰ্ষবিন্দু কেইটা $A(4, 6)$, $B(1, 5)$ আৰু $C(7, 2)$ । এডাল ৰেখা এনেভাৱে টনা হ'ল যে ই AB আৰু AC ক ক্ৰমে D আৰু E বিন্দুত ছেদ কৰে আৰু তেতিয়া

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4} \text{ হয়। } \Delta ADE \text{ ৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা আৰু এই মান } \Delta ABC \text{ ৰ কালিৰ লগত}$$

তুলনা কৰা। (উপপাদ্য 6.2 আৰু 6.6 মনত পেলোৱা)।

7. ধৰাহ'ল, $A(4, 2)$, $B(6, 5)$ আৰু $C(1, 4)$ বিন্দুকেইটা ΔABC ৰ শীৰ্ষবিন্দু।

(i) A ৰ পৰা টনা মধ্যমাই BC ক D বিন্দুত ছেদ কৰে। D বিন্দুৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) AD ৰ ওপৰত P বিন্দুটো এনেভাৱে আছে যে $AP : PD = 2 : 1$; P ৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰা।

(iii) Q আৰু R বিন্দু দুটা ক্ৰমে BE আৰু CF মধ্যমাৰ ওপৰত আছে যাতে $BQ : QE = 2 : 1$ আৰু $CR : RF = 2 : 1$; Q আৰু R ৰ স্থানাংক উলিওৱা।

(iv) ইয়াৰপৰা তোমালোকে কি লক্ষ্য কৰিলা?

[টোকা : ত্ৰিভুজৰ মধ্যমা তিনিডালৰ উমৈহতীয়া বিন্দুটোক ভাৰকেন্দ্ৰ (*centroid*) বুলি কোৱা হয় আৰু ই মধ্যমা এডালক 2 : 1 অনুপাতত ভাগ কৰে।]

(v) যদি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ আৰু $C(x_3, y_3)$ বিন্দুকেইটা $\triangle ABC$ ৰ শীৰ্ষবিন্দু, তেনেহ'লে ত্ৰিভুজটোৰ ভাৰকেন্দ্ৰৰ স্থানাংক উলিওৱা।

8. ABCD আয়তটো $A(-1, -1)$, $B(-1, 4)$, $C(5, 4)$ আৰু $D(5, -1)$ বিন্দুকেইটাৰে গঠিত। P, Q, R আৰু S বিন্দু কেইটা AB, BC, CD আৰু DA ৰ মধ্যবিন্দু। PQRS চতুৰ্ভুজটো বৰ্গ নে? নে আয়ত? নে এটা বস্ৰাচ? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা আগবঢ়োৱা।

7.5 সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলত দিয়া মূল কথা কেইটা অধ্যয়ন কৰিলা

1. $P(x_1, y_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2)$ ৰ মাজৰ দূৰত্ব হ'ল $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
2. মূল বিন্দুৰ পৰা $P(x, y)$ বিন্দুৰ দূৰত্ব হ'ল $\sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক $m_1 : m_2$ অনুপাতত অন্তৰ্ভুক্ত কৰা $P(x, y)$ বিন্দুটোৰ স্থানাংক হ'ল $\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$.
4. $P(x_1, y_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাৰ মধ্যবিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$.
5. (x_1, y_1) , (x_2, y_2) আৰু (x_3, y_3) বিন্দু তিনিটাৰে গঠিত ত্ৰিভুজটোৰ কালি তলৰ ৰাশিটোৰ সাংখ্যিক মানৰ সমান $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

পঢ়িবলৈ এটি টোকা (A Note To The Reader)

অনুচ্ছেদ 7.3 ত আলোচনা কৰা বিভাজন সূত্ৰটোত $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাক $m_1 : m_2$ অনুপাতত অন্তৰ্ভুক্ত কৰা P বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y) তলত

$$\text{দিয়াৰ দৰে পোৱা যায়- } x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

মন কৰা যে ইয়াত, $PA : PB = m_1 : m_2$, যদিহে P বিন্দুটো A আৰু B ৰ মাজত নাথাকি AB ৰেখাৰ ওপৰত AB ৰেখাখণ্ডৰ বাহিৰত থাকে আৰু $PA : PB = m_1 : m_2$, তেতিয়া কওঁয়ে P য়ে AB ক বহিৰ্ভুক্ত কৰিছে। এই পৰিস্থিতিত যিটো বিভাজন সূত্ৰ হ'ব এই বিষয়ে ওপৰৰ শ্ৰেণীত পঢ়িবলৈ পাবা।